Valószínűségszámítás
Megoldások

1) Egy nagyvárosban a helyi járatokon olyan buszjegyet kellett érvényesíteni, amelyen egy 3×3-as négyzetben 1-9-ig szerepelnek a számok. (lásd 1. ábra) A jegy érvényesítésekor a jegykezelő automata a kilenc mezőből mindig pontosan hármat lyukaszt ki.

a) Rajzolja le az összes olyan lyukasztást, amelyben minden sorban és minden oszlopban pontosan egy kilyukasztott mező van! Indokolja, hogy miért ezek és csak ezek a lehetséges lyukasztások! (4 pont)

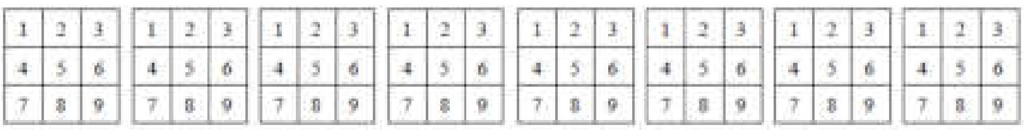
b) Rajzoljon a 2. ábrán megadott mezőbe egy olyan lyukasztást, amelyen a ki nem lyukasztott hat kis négyzetlap olyan tartományt fed le, amelynek pontosan egy szimmetriatengelye van! (A mezőkre nyomtatott számoktól most eltekintünk). Rajzolja be a szimmetriatengelyt! (3 pont)

Két kisiskolás a buszra várakozva beszélget. Áron azt mondja, hogy szeretné, hogy a buszjegyen kilyukasztott három szám mindegyike prím lenne. Zita pedig azt reméli, hogy a számok összege 13 lesz.

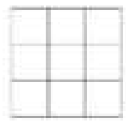
c) Mekkora valószínűséggel teljesül Áron, illetve Zita kívánsága?

(9 pont)

1.ábra



2.ábra



Megoldás:

a) *Lásd: Kombinatorika 1. feladat*

b) *Lásd: Kombinatorika 1. feladat*

c) Az első kilenc pozitív egész között 4 prímszám van (1 pont)

Kedvező esetek száma 4 (1 pont)

Az összes lehetséges lyukasztások száma: $\binom{9}{3} = 84$ (2 pont)

Áron kívánsága $P = \frac{4}{84} \approx \mathbf{0{,}048}$ valószínűséggel teljesül (1 pont)

Zita kívánságának 7 számhármas felel meg:

$(1;3;9)(1;4;8)(1;5;7)$

$(2;3;8)(2;4;7)(2;5;6)$ (3 pont)

$(3;4;6)$

A keresett valószínűség $P = \frac{7}{84} \approx \mathbf{0{,}083}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

2) Hét szabályos pénzérmét egyszerre feldobunk, és feljegyezzük a fejek és írások számát.

a) Mekkora a valószínűsége, hogy több fejet dobunk, mint írást? (7 pont)

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a fejek és írások számának különbsége nagyobb háromnál? (7 pont)

Megoldás:

a) Mivel hét pénzérmét dobunk fel, akkor lesz több fej, mint írás, ha 4,5,6 vagy 7 fejet dobunk (2 pont)
Ekkor éppen 3,2,1 vagy 0 írás lesz (1 pont)
Szimmetria okokból ennek ugyanannyi a valószínűsége, mint ha 3,2,1 vagy 0 fejet dobtunk volna (2 pont)
Tehát a keresett valószínűség **0,5** (2 pont)

b) Akkor nagyobb a különbség 3-nál, ha 6 fej és 1 írás, vagy 7 fej és 0 írás van (3 pont)
A kedvező esetek száma: $\binom{7}{1}+\binom{7}{0}=$ (2 pont)
$=7+1=8$ (1 pont)
A keresett valószínűség $\frac{8}{128}=\mathbf{0,0625}$ (1 pont)

Összesen: 14 pont

3) Két közvélemény-kutató cég mérte fel a felnőttek dohányzási szokásait. Az egyik cég véletlenszerűen választott 800 fős mintában 255 rendszeres dohányost talált, a másik egy hasonlóan véletlenszerűen választott 2000 fős mintában 680-at.

a) Adja meg mindkét mintában a dohányosok relatív gyakoriságát! (4 pont)

b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy ha a fenti 2000 fős mintából véletlenszerűen kiválasztunk 3 főt, akkor éppen 1 dohányos van közöttük? (7 pont)

c) Tegyük fel, hogy a lakosság 34%-a dohányos. Számolja ki annak a valószínűségét, hogy az országban 10 találomra kiválasztott felnőtt közül egy sem dohányos! (5 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Statisztika 19. feladat*

b) Bármelyik 3 személy kiválasztása a 2000-es mintából egyformán lehetséges, ezért az összes esetek száma: $\binom{2000}{3}=1331334000$ (1 pont)
680 dohányosból kell kiválasztani egy személyt, ami 680-féleképpen tehető meg (1 pont)
1320 nem dohányzóból kell kettőt kiválasztani, ez összesen $\binom{1320}{2}=870540$-féleképpen tehető meg (1 pont)
A kedvező esetek száma $680\cdot\binom{1320}{2}$ (1 pont)
A keresett valószínűség $P=\frac{680\cdot\binom{1320}{2}}{\binom{2000}{3}}$ (2 pont)
Ennek közelítő értéke **0,44** (1 pont)

c) 1 nem dohányos kiválasztásának valószínűsége $1-0,34=0,66$ (2 pont)

10 nem dohányos kiválasztásának valószínűsége $0,66^{10}$ (2 pont)

ami megközelítőleg **0,016** vagy **1,6%** (1 pont)

Összesen: 16 pont

4) Egyszerre feldobunk hat szabályos dobókockát, amelyek különböző színűek.

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindegyik kockával más számot dobunk? (5 pont)

b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy dobásnál a hat dobott szám összege legalább 34 lesz! (9 pont)

Megoldás:

a) A kockák különbözőek, tehát az összes lehetséges eset 6^6 (2 pont)

Ha mindegyiknél más számot dobunk, akkor a hat különböző szám $6!$-féleképpen fordulhat elő. (2 pont)

Innen a klasszikus formula szerint a valószínűség $\frac{6!}{6^6}=\mathbf{0,0154}$. (1 pont)

b) A hat szám összege legalább 34, azt jelenti, hogy 34, 35 vagy 36 (1 pont)

Tehát a következő esetek lehetnek:

(1) $36=6+6+6+6+6+6$

(2) $35=6+6+6+6+6+5$

(3) $34=6+6+6+6+6+4$

(4) $34=6+6+6+6+5+5$ (2 pont)

Összeszámoljuk, hogy az egyes esetek hányféleképpen fordulhatnak elő:

(1) egyféleképpen (1 pont)

(2) 6-féleképpen

(3) 6-féleképpen (1 pont)

(4) $\binom{6}{2}=15$-féleképpen (2 pont)

A kedvező esetek száma összesen: $1+6+6+15=28$. (1 pont)

A keresett valószínűség: $P=\frac{28}{6^6}\approx\mathbf{0,0006}$. (1 pont)

Összesen: 14 pont

5) Egy utazási iroda az országos hálózatának 55 értékesítő helyén kétféle utat szervez Párizsba. Az egyiket autóbusszal (*A*), a másikat repülővel (*R*). Egy adott turnusra nézve összesítették az egyes irodákban eladott utak számát. Az alábbi táblázatból az összesített adatok olvashatók ki. Pl. az (1;2) „koordinátájú" 5-ös szám azt jelzi, hogy 5 olyan fiókiroda volt, amelyik az adott turnusra 1 db autóbuszos és 2 db repülős utat adott el.

		***A* típusú eladott utak száma**				
		0	**1**	**2**	**3**	**4**
***R* típusú eladott utak száma**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**2**
	1	**1**	**2**	**2**	**3**	**1**
	2	**1**	**5**	**2**	**3**	**4**
	3	**0**	**3**	**1**	**2**	**9**
	4	**1**	**3**	**3**	**2**	**2**

a) Összesen hány autóbuszos és hány repülős utat adtak el a vizsgált turnusra az 55 fiókban? (7 pont)

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy 55 fiókiroda közül véletlenszerűen választva egyet, ebben az irodában 5-nél több párizsi utat adtak el? (7 pont)

Megoldás:

a) Ha az 5x5-ös táblázatban összeadjuk a k. oszlopban lévő számokat, megkapjuk, hány irodában adtak el k darab autóbuszos utat (1 pont)
Ha a táblázat n. sorában lévő számokat adjuk össze, akkor megkapjuk, hogy hány irodában adtak el n darab repülős utat (1 pont)

		***A* típusú eladott utak száma**						
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**összeg**	**utak száma**
***R* típusú eladott utak száma**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**2**	**5**	**0**
	1	**1**	**2**	**2**	**3**	**1**	**9**	**9**
	2	**1**	**5**	**2**	**3**	**4**	**15**	**30**
	3	**0**	**3**	**1**	**2**	**9**	**15**	**45**
	4	**1**	**3**	**3**	**2**	**2**	**11**	**44**
	Összeg	**4**	**14**	**8**	**19**	**10**	**(55)**	**128**
	utak száma	**0**	**14**	**16**	**57**	**40**	**127**	

táblázat számított adatainak helyes megállapítása (3 pont)
Autóbuszos utak száma **127**, a Repülős utak száma **128** (2 pont)

b) 5-nél több utat az az iroda adott el, amelyikben hat, hét vagy nyolc az eladott utak száma
Hat utat adott el az iroda, ha a táblázatban lévő koordinátáinak (k, n) összege 6. Ez három esetben lehetséges: $k+n=2+4=3+3=4+2$ (1 pont)
Ezekhez az adatokhoz tartozó irodák száma $3+9+3=15$ (1 pont)
Hét utat adott el az iroda, ha a táblázatban lévő koordinátáinak (k, n) összege 7. Ez két esetben lehetséges: $k+n=3+4=4+3$ (1 pont)
Ezekhez az adatokhoz tartozó irodák száma $2+2=4$ (1 pont)
Nyolc utat adott el az iroda, ha a táblázatban lévő koordinátáinak (k, n) összege 8. Ez egy esetben lehetséges: $k+n=4+4$ (1 pont)
Ezekhez az adatokhoz tartozó irodák száma 2 (1 pont)
Mivel 55 irodafiók volt, és közülük 5-nél több utat 21–ben adtak el, a keresett valószínűség $\frac{21}{55}\approx \mathbf{0,3818}$ (1 pont)

Összesen: 14 pont

6) Annának az IWIW-en 40 ismerőse van (Az IWIW weboldalon lehetőség van az egymást ismerő emberek kapcsolatfelvételére. Ebben a feladatban minden ismertséget kölcsönösnek tekintünk.)
Anna ismerőseinek mindegyike Anna minden többi ismerőse közül pontosan egyet nem ismer.

a) A szóba került 41 ember között összesen hány ismertség áll fenn? (5 pont)

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy Anna 40 ismerőse közül véletlenszerűen választva kettőt, ők ismerik egymást? (5 pont)

c) Válasszunk most a 41 személy közül véletlenszerűen kettőt! Mennyi a valószínűsége, hogy nem ismerik egymást? (6 pont)

Megoldás:

a) A 41 főből álló társaság ismertségi számát megkaphatjuk, ha összeadjuk Anna ismerőseinek és Anna 40 ismerőse egymás közti ismertséginek számát (1 pont)

Anna ismeri a 40 ismerősét (1 pont)

Anna 40 ismerősének mindegyik 38 embert ismer Annán kívül (1 pont)

Így Anna 40 ismerősének $\frac{40 \cdot 38}{2} = 760$ ismertsége van egymás közt (1 pont)

A 41 fő közt $40 + 760 = \mathbf{800}$ ismertsége van (1 pont)

b) Vannak 40-en, akikből választhatunk (1 pont)

Az elsőnek választott személy bárki lehet (1 pont)

Utána 39-ből kell választani egyet (1 pont)

Mivel az előzőnek választott személy közülük egyet nem ismer, így 38-at ismer (1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy ismerik egymást $\mathbf{\frac{38}{39}}$ (1 pont)

c) A kiválasztott két személy közül vagy Anna az egyik, vagy mindkettő Anna ismerősei közül való (1 pont)

1. eset: Ha Anna az egyik kiválasztott

Ekkor a másik választásától függetlenül a két ember ismeri egymást. A kedvező esetek száma ekkor nulla (1 pont)

2. eset: Ha Anna ismerősei közül való a két választott

Akkor a 40 személy kettesével párba állítható, úgy, hogy a párok két-két tagja nem ismerik egymást, ezért 20 kedvező eset van (1 pont)

Az összes lehetséges kiválasztások száma $\binom{41}{2}$ (1 pont)

azaz 820 (1 pont)

Így a kérdéses valószínűség $P = \frac{0+20}{820} = \frac{1}{41} \approx \mathbf{0{,}0244}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

7) Egy urnában 5 azonos méretű golyó van, 2 piros és 3 fehér. Egyesével, és mindegyik golyót azonos eséllyel húzzuk ki az urnából a bent lévők közül.

a) Hány különböző sorrendben húzhatjuk ki az 5 golyót, ha a kihúzott golyót nem tesszük vissza, és az azonos golyókat nem különböztetjük meg egymástól? (4 pont)

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az utolsó (ötödik) húzás előtt az urnában egy darab fehér golyó van? (4 pont)

Az eredeti golyókat tartalmazó urnából hatszor húzunk úgy, hogy a kihúzott golyót minden húzás után visszatesszük.

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a hat húzásból legfeljebb kétszer húzunk piros golyót? (A valószínűséget három tizedesjegyre kerekített értékkel adja meg!) (8 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Kombinatorika 8. feladat*

b) A már kihúzott 2 piros és 2 fehér golyó húzása $\binom{4}{2}$ (2 pont)

azaz 6 különböző sorrendben történhetett (1 pont)

A lehetséges esetek száma 10, így a valószínűség $P = \frac{6}{10} = \mathbf{0,6}$ (1 pont)

c) A hat húzásból legfeljebb kétszer húzunk piros golyót: ha nem húzunk pirosat (*A* esemény), vagy 1 pirosat húzunk (*B* esemény), vagy 2 pirosat húzunk (*C* esemény) (1 pont)
Mivel az *A*, *B* és *C* események páronként kizáró események, a keresett valószínűség $P = P(A) + P(B) + P(C)$ (1 pont)

Piros golyó húzásának valószínűsége $\frac{2}{5}$, fehér golyó húzásának valószínűsége $\frac{3}{5}$ minden húzásnál, ezért (1 pont)

$P(A) = \binom{6}{0} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^6 = 0,0467$ (1 pont)

$P(B) = \binom{6}{1} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^5 = 0,1866$ (1 pont)

$P(C) = \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^4 = 0,3110$ (1 pont)

A keresett valószínűség: $P = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{729 + 2916 + 4860}{5^6} = \frac{8505}{15625}$
(1 pont)

ami közelítőleg **0,544** (1 pont)

Összesen: 16 pont

8) A Kovács családban 4 embernek kezdődik a keresztneve *B* betűvel. Négyen teniszeznek, és négyen kerékpároznak rendszeresen.
A család tagjairól tudjuk:

- **csak Bea és Barbara jár teniszezni és kerékpározni is;**
- **egyedül Balázs nem űzi egyik sportágat sem**
- **Zoli próbálja testvérét, Borit a teniszezőktől hozzájuk, a kerékpározókhoz csábítani- sikertelenül.**

a) A fentiek alapján legalább hány tagja van a Kovács családnak? **(5 pont)**

Egyik nap Barbara, Bea, Bori és Balázs barátaikkal vonaton utaztak, és hogy jobban teljen az idő, játszottak. A játék kezdetekor a társaság minden tagjának egy-egy olyan háromjegyű pozitív számra kellett gondolnia, amelynek minden számjegye 4-nél nagyobb és 7-nél kisebb. Amikor sorra megmondták a gondolt számot, kiderült, hogy nincs a mondott számok között azonos.

b) Legfeljebb hány tagú lehetett a társaság? **(3 pont)**

Egy másik alkalommal Barbara, Bea, Bori, Balázs és 4 barátjuk (Attila, András, Ali és Anna) moziba ment. Mind a 8 jegy egy sorba, egymás mellé szólt.

c) A 8 ember hány különböző ülésrendben foglalhat helyet, ha az azonos betűvel kezdődő keresztnevüek közül semelyik kettő nem kerül egymás mellé? (5 pont)

d) Mekkora a valószínűsége annak, hogy a c) pont szerinti ülésrend alakul ki, ha minden ülésrend egyenlően valószínű? (3 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Halmazok 3. feladat*

b) *Lásd: Kombinatorika 10. feladat*

c) *Lásd: Kombinatorika 10. feladat*

d) A 8 ember összes ülésrendjének száma $8! = 40320$ (1 pont)

Mivel bármilyen ülésrend egyenlően valószínű, a kérdéses valószínűség $p = \frac{2 \cdot 4! \cdot 4!}{8!} = \frac{1152}{40320} = \frac{1}{35} \approx \mathbf{0{,}0286}$ (2 pont)

Összesen: 16 pont

9) Egy matematikus három német és négy magyar matematikust hívott vendégségbe szombat délutánra. Csütörtökön a házigazda és a 7 meghívott közül néhányan telefonon egyeztettek. A házigazda mindenkivel beszélt. Az azonos nemzetiségü vendégek egymást nem hívták, de a többiekkel mind beszéltek telefonon. Senki sem beszélt egy másik emberrel egynél többször, és minden beszélgetés pontosan két ember között zajlott.

a) Hány telefonbeszélgetést bonyolított le egymás között a 8 matematikus csütörtökön? (5 pont)

A telefonbeszélgetéskor minden meghívott vendég megmondta, hogy mekkora valószínűséggel megy el a szombati vendégségbe. A házigazda tudta, hogy a meghívottak egymástól függetlenül döntenek arról, hogy eljönnek-e. Kiszámolta, hogy 0,028 annak a valószínűsége, hogy mindannyian eljönnek.

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább egy meghívott elmegy a vendégségbe? (Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg!) (11 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Kombinatorika 11. feladat*

b) Legyen p az a valószínűség, amit mindannyian mondtak. Mivel egymástól függetlenül döntöttek, (1 pont)

annak valószínűsége, hogy mindenki elmegy $p^7 = 0{,}028$ (2 pont)

Innen $p = \sqrt[7]{0{,}028} \approx 0{,}600$ (2 pont)

Annak a valószínűsége, hogy valaki nem megy el $1 - p$ (1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy senki sem megy el: $(1-p)^7 \approx 0{,}4^7 \approx 0{,}0016$ (2 pont)

Tehát annak a valószínűsége, hogy legalább egy ember elmegy: $1-(1-p)^7$, (2 pont)

ami megközelítőleg **0,998** (1 pont)

Összesen: 16 pont

10) a) Peti levelet írt négy barátjának, Andrásnak, Bélának, Csabának és Daninak és mindenkinek egy-egy fényképet is akart küldeni a nyaralásról. A négy fénykép különböző volt, és Peti mindegyikük hátlapjára ráírta, kinek szánja. A fényképeket végül figyelmetlenül rakta a borítékba, bár mindenki kapott a levelében egy fényképet is.

i. Hányféleképpen fordulhat elő, hogy csak Andris kapja azt a fényképet, amelyen a saját neve szerepel? (3 pont)

ii. Melyik esemény bekövetkezésének nagyobb a valószínűsége:

- senki sem kapja azt a fényképet, amelyet Peti neki szánt

vagy

- pontosan egyikük kap olyan fényképet, amelyen a saját neve szerepel? (8 pont)

b) Egy szabályos érme egyik oldalán 6-os, a másikon pedig 4-es számjegy látható. Az érmét négyszer egymás után feldobjuk, és a dobott számokat összeadjuk. Milyen értékeket kaphatunk összeg gyanánt? Az egyes összegek dobásának mekkora a valószínűsége? (5 pont)

Megoldás:

a) Jelöljük a fényképekre írt neveket *A, B, C, D*-vel, a neveknek megfelelő borítékon lévő címzéseket *a, b, c, d*-vel.

a1) Andris kapott csak megfelelő fényképet. Ez csakis úgy lehetséges, ha az *abcd* sorrendben elhelyezett borítékokba az *ACDB* vagy *ADBC* sorrendben kerültek a képek. (2 pont)

Tehát a kívánt elhelyezés **kétféleképpen** valósítható meg. (1 pont)

a2) Jelölte *S* azt az eseményt, hogy senki sem kapott nevével ellátott fényképet. Az *S* esemény pontosan akkor következik be, ha az *abcd* sorrendben elhelyezett borítékokba *BADC, BCDA, BDAC, CADB, CDAB, CDBA, DABC, DCAB, DCBA* sorrendben kerülhettek fényképek. Ez 9 kedvező eset (3 pont)

Jelölje *E* azt az eseményt, hogy pontosan egyikük kapott nevével ellátott fényképet. AZ *E* esemény pontosan akkor következik be, ha az *abcd* sorrendben elhelyezett borítékokba *ACDB, ADBC, BCAD, BDCA, CABD, CBDA, DACB, DBAC* sorrendben kerülhettek a fényképek. Ez 8 kedvező eset (3 pont)

A fényképeket Peti 24-féleképpen helyezhette volna el a borítékokba, ezen elhelyezéseknek azonos a valószínűsége. (1 pont)

$\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{24}} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{S}) > \boldsymbol{P}(\boldsymbol{E}) = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{24}}$ (1 pont)

b) A négy dobáshoz tartozó összegek lehetnek:

$6+6+6+6=\mathbf{24}\quad (B_0)$

$6+6+6+4=\mathbf{22}\quad (B_1)$

$6+6+4+4=\mathbf{20}\quad (B_2)$ (1 pont)

$6+4+4+4=\mathbf{18}\quad (B_3)$

$4+4+4+4=\mathbf{16}\quad (B_4)$

Bármelyik dobásnál a 6-os és 4-es is $\frac{1}{2}$ valószínűséggel következik be (1 pont)

A B_k események valószínűségét a $p=\frac{1}{2}; n=4$ paraméterű binomiális eloszlás írja le (1 pont)

Ezért:

$$P(B_0)=\binom{4}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$$

$$P(B_1)=\binom{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{4}{16}$$

$$P(B_2)=\binom{4}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{6}{16}$$ (2 pont)

$$P(B_3)=\binom{4}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{4}{16}$$

$$P(B_4)=\binom{4}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$$

Összesen: 16 pont

11)

a) Két gyerek mindegyike 240 forintért vett kaparós sorsjegyet. Fémpénzzel fizettek (5; 10; 20; 50; 100 és 200 forintos érmékkel), és pontosan kiszámolták a fizetendő összeget. Hányféleképpen fizethetett Miki, ha ő 4 darab érmével fizetett, és hányféleképpen fizethetett Karcsi, ha ő 5 darab érmével fizetett. (A pénzérmék átadási sorrendjét nem vesszük figyelembe) (4 pont)

A „bergengóc" lottóban kétszer húznak egy játéknapon. Bandi egy szelvénnyel játszik, tehát az adott játéknapon mindkét húzásnál nyerhet ugyanazzal a szelvénnyel.

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy adott játéknapon Bandinak legalább egy telitalálata lesz, ha P annak a valószínűsége $(0<P<1)$, hogy egy szelvényen, egy húzás esetén telitalálata lesz? (4 pont)

Megváltoztatták a játékszabályokat: minden játéknapon csak egyszer húznak (más játékszabály nem változott). Bandi most két (nem feltétlenül különbözően kitöltött) szelvénnyel játszik.

c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy adott játéknapon Bandinak telitalálata legyen valamelyik szelvényen? (4 pont)

d) A telitalálat szempontjából a b) és c)-ben leírtak közül melyik éri meg Bandi számára? (4 pont)

<u>Megoldás:</u>

a) *Lásd: Kombinatorika 15. feladat*

b) Bandinak telitalálata háromféle esetben lehet:

(1) az első húzásnál telitalálata van, a másodiknál is telitalálta van, ennek a valószínűsége $p\cdot p=p^2$ (1 pont)

(2) az első húzásnál telitalálata van, nincs másodiknál nincs telitalálata, ennek valószínűsége $p\cdot(1-p)=p-p^2$ (1 pont)

(3) az első húzásnál nincs telitalálata, a másodiknál telitalálata van, ennek valószínűsége: $(1-p)\cdot p=p-p^2$ (1 pont)

Annak a valószínűsége tehát, hogy egy adott játéknapon Bandinak telitalálata legyen ez a három valószínűség összege: $\boldsymbol{2p-p^2}$ (ez nem negatív, hiszen $0<p<1$) (1 pont)

c) Két esetet kell vizsgálni annak alapján, hogy Bandi a két szelvényét azonosan vagy különbözően töltötte-e ki (1 pont)

(1) Ha Bandi két egyforma szelvényt töltött ki, akkor a telitalálat esélye ***p*** (1 pont)

(2) Ha Bandi a két szelvényt különbözően tölt ki, akkor a telitalálat esélye **2*p*** (2 pont)

d) Ha Bandi két egyforma szelvényt tölt ki, akkor a kérdés az, hogy $2p-p^2$ vagy p nagyobb (1 pont)

Mivel $0<p<1$, ezért $2p-p^2-p=p(1-p)>0$, tehát az **első játékszabály** kedvezőbb (1 pont)

Ha Bandi két különböző szelvényt tölt ki, akkor a kérdés az, hogy $2p-p^2$ vagy $2p$ nagyobb (1 pont)

Mivel $p^2>0$ ezért $2p-p^2<2p$ tehát **a második játékszabály** a kedvezőbb (1 pont)

Összesen: 16 pont

12) Egy gyártósoron 8 darab gép dolgozik. A gépek mindegyike, egymástól függetlenül 0,05 valószínűséggel túlmelegszik a reggeli bekapcsoláskor. Ha a munkanap kezdetén 3 vagy több gép túlmelegszik, akkor az egész gyártósor leáll! A 8 gép reggeli beindításakor bekövetkező túlmelegedések számát a binomiális eloszlással modellezzük.

a) Adja meg az eloszlás két paraméterét! Számítsa ki az eloszlás várható értékét! (3 pont)

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a reggeli munkakezdéskor egyik gép sem melegszik túl? (4 pont)

c) Igazolja a modell alapján, hogy (négy tizedes jegyre kerekítve) 0,0058 annak a valószínűsége, hogy a gépek túlmelegedése miatt a gyártósoron leáll a termelés a munkanap kezdetekor! (7 pont)

Megoldás:

a) $n=8$ (1 pont)

$p=0{,}05$ (1 pont)

a várható érték: $n\cdot p=\mathbf{0{,}4}$ (1 pont)

b) Minden gép $1-p=0{,}95$ valószínűséggel indul be reggel (1 pont)

Annak valószínűsége, hogy mind a 8 gép beindul: $0{,}95^8$ (2 pont)

ami $\approx \mathbf{0{,}6634}$ $(66{,}34\%)$ (1 pont)

c) A kérdéses esemény (A) esemény komplementerének (B) valószínűségét számoljuk ki, azaz, hogy legfeljebb 2 gép romlik el. (1 pont)

$P(B)=0{,}95^8+\binom{8}{1}\cdot 0{,}05^2\cdot 0{,}95^6=$ (2 pont)

$=0{,}95^8+8\cdot 0{,}05\cdot 0{,}95^7+28\cdot 0{,}05^2\cdot 0{,}95^6\approx$ (1 pont)

$\approx 0{,}9942$ (2 pont)

$P(A)=1-P(B)=1-0{,}9942=0{,}0058$, tehát valóban **0,0058** a termelés leállásának a valószínűsége. (1 pont)

Összesen: 14 pont

13) Egy 32 fős érettségiző osztály tanulói három különböző táncot mutatnak be a szalagavató bálon. AZ alábbi táblázat az egyes táncokban fellépő diákok számát mutatja nemenkénti bontásban.

	Keringő	Kán-kán	Hip-hop	Egyik sem
Lány	9	6	10	2
Fiú	9	0	4	2

Van 2 olyan lány, aki mindhárom táncban fellép, ugyanakkor nincs olyan fiú az osztályban, aki egynél több produkcióban részt venne.

a) A lányok közül kettőt véletlenszerűen kiválasztva, mennyi annak a valószínűsége, hogy mindketten táncolnak a kán-kánban? (5 pont)

b) Az osztály tanulói közül egyet véletlenszerűen kiválasztva, mennyi a valószínűsége annak, hogy az illető pontosan két táncban szerepel? (9 pont)

Megoldás:

a) Mivel minden fiú legfeljebb egy táncban lépett fel, ezért a fiúk száma a táblázat alapján 15 (1 pont)

a lányok száma pedig 17 (1 pont)

A 17 lányból kettőt $\binom{17}{2} = 136$-féleképp lehet kiválasztani (1 pont)

6 lány táncolt kán-kánt, közülük kettőt $\binom{6}{2} = 15$-féleképp lehet kiválasztani (1 pont)

A keresett valószínűség $P = \frac{15}{136} \approx \mathbf{0{,}11}$ (1 pont)

b) A pontosan két táncban fellépő diák csak lány lehet (1 pont)

Mivel két lány egyik táncban sem lépett fel, ezért 15 lány között kell keresnünk a pontosan kétszer táncolókat (1 pont)

Ha a pontosan kétszer táncolók közül x a keringőző és kán-kánozó, y a kán-kánozó és hip-hopozó, z pedig a keringőző és hip-hopozó lányok száma, akkor a csak keringőző lányok száma $9-x-z-2$ (1 pont)

A csak kán-kánozó lányok száma $6-x-y-2$ (1 pont)

A csak hip-hopozó lányok száma $10-y-z-2$ (1 pont)

A logikai szita formula alapján:

$(9-x-z-2)+(6-x-y-2)+(10-y-z-2)+x+y+z+2=15$ (1 pont)

ahonnan $x+y+z=6$ (1 pont)

Az osztály tanulói közül egy diák kiválasztására 32 lehetőség van (1 pont)

így a keresett valószínűség $P = \frac{6}{32} = \mathbf{0{,}1875}$ (1 pont)

Összesen: 14 pont

14) a) Két szabályos dobókockát egyszerre feldobunk. Számítsa ki a következő két esemény valószínűségét:

***A*: a dobott számok összege prím**

***B*: a dobott számok összege osztható 3-mal (6 pont)**

b) Az 1,2,3,4,5,6 számjegyekből véletlenszerűen kiválasztunk három különbözőt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott számjegyek mindegyikének egyszeri felhasználásával 4-gyel osztható háromjegyű számot tudunk képezni? (5 pont)

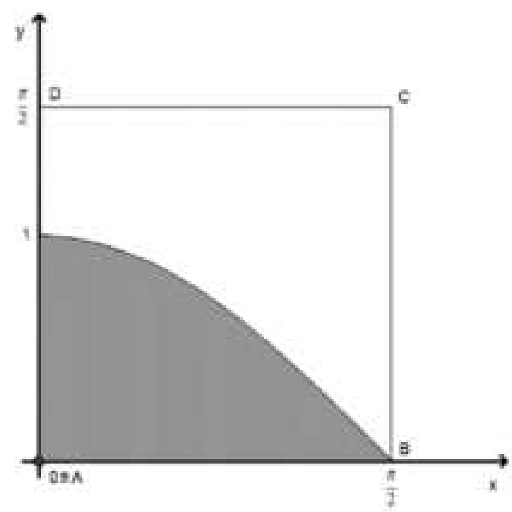
c) Az *ABCD* négyzet csúcsai: $A(0;0), B\left(\frac{\pi}{2};0\right), C\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right), D\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Véletlenszerűen kiválasztjuk a négyzet egy belső pontját. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott pont a koordinátatengelyek és az $f:\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}, f(x)=\cos x$ függvény grafikonja által határolt tartomány egyik pontja? (5 pont)

Megoldás:

a) A dobott számok összege a következő esetekben lesz prím: $1+1$, $1+2$, $1+4$, $2+3$, $1+6$, $2+5$, $3+4$, $5+6$. (1 pont)
Az $1+1$ eset kivételével mindegyik összeg kétféleképpen valósulhat meg, így az *A* eseményt 15 elemi esemény valósítja meg (1 pont)
Az összes elemi esemény $6\cdot 6=36$, ezért $\boldsymbol{P(A)=\frac{15}{36}}$ (1 pont)
A dobott számok összege a következő esetekben lesz 3-mal osztható: $1+2$, $1+5$, $2+4$, $3+3$, $3+6$, $4+5$, $6+6$. (1 pont)
A $3+3$ és a $6+6$ esetek egyféleképpen, a többi kétféleképpen valósulhat meg, (1 pont)
így $\boldsymbol{P(B)=\frac{12}{36}}$ (1 pont)

b) A hat számjegyből hármat $\binom{6}{3}=20$ különböző módon tudunk kiválasztani (1 pont)
A 4-gyel oszthatóság szabálya alapján kedvező esetet kapunk, ha a kiválasztott három számjegy között van kettő, amelyekből 4-gyel osztható kétjegyű szám képezhető (1 pont)
Ezek között négy olyan hármas van, amely nem tartalmaz két megfelelő számjegyet: (1, 3, 5); (1, 3, 4); (1, 4, 5); (3, 4, 5). (2 pont)
Így a keresett valószínűség $P=\frac{20-4}{20}=\frac{16}{20}=\boldsymbol{\frac{4}{5}}$ (1 pont)

c) A négyzet és az *f* függvény grafikonjának felvétele közelítő pontossággal (1 pont)



A négyzet területe $\frac{\pi^2}{4}$ (1 pont)
A koordinátatengelyek és az *f* függvény grafikonja által határolt tartomány területe: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=$ (1 pont)
$=[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1$ (1 pont)
A valószínűség kiszámításának geometriai modelljét alkalmazva, a keresett valószínűség: $P=\frac{1}{\frac{\pi^2}{4}}=\frac{4}{\pi^2}\approx\mathbf{0{,}405}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

15) **A főiskolások műveltségi vetélkedője a következő eredménnyel zárult. A versenyen induló négy csapatból a győztes csapat pontszáma 4 / 3-szorosa a második helyen végzett csapat pontszámának. A negyedik, harmadik és második helyezett pontjainak száma egy mértani sorozat három egymást követő tagja, és a negyedik helyezettnek 25 pontja van. A négy csapat között kiosztott pontszámok összege 139.**

a) Határozza meg az egyes csapatok által elért pontszámot! (8 pont)

Mind a négy csapatnak öt-öt tagja van. A vetélkedő után az induló csapatok tagjai között három egyforma értékű könyvutalványt sorsolnak ki (mindenki legfeljebb egy utalványt nyerhet).

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy az utalványokat három olyan főiskolás nyeri, akik mindhárman más-más csapat tagjai? (5 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Sorozatok 8. feladat*

b) Lehetséges (egyenlő valószínű) kimenetelek száma $\binom{20}{3} = 1140$ (2 pont)

Kedvező kimenetelek száma: $\binom{4}{3} \cdot 5^3 = 500$ (2 pont)

A kérdezett valószínűség: $\frac{500}{1140} \approx \mathbf{0,439}$ (1 pont)

Összesen: 13 pont

16) **Egy rendezvényre készülődve 50 poharat tesznek ki az asztalra. A poharak között 5 olyan van, amelyik hibás, mert csorba a széle.**

a) Az egyik felhasználó az asztalról elvesz 10 poharat, és ezekbe üdítőitalt tölt. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy legfeljebb egy csorba szélű lesz a 10 pohár között! (5 pont)

b) A poharakat előállító gyárban két gépsoron készülnek a poharak, amelyek külsőre mind egyformák. Az első gépsoron gyártott poharak 10%-a selejtes. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy az első gépsoron gyártott poharak közül 15-öt véletlenszerűen, visszatevéssel kiválasztva közülük pontosan 2 lesz selejtes! (4 pont)

c) A második gépsoron készült poharak 4%-a selejtes. Az összes pohár 60%-át az első gépsoron, 40%-át a második gépsoron gyártják, az elkészült poharakat összekeverik. Az elkészült poharak közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet és azt tapasztaljuk, hogy selejtes. Mekkora annak a valószínűsége, hogy ez a pohár az első gépsoron készült? (7 pont)

Megoldás:

a) Az egyenlően valószínű kimenetelek száma: $\binom{50}{10}$ (1 pont)

A kedvező kimenetelek száma: $\binom{45}{10} + \binom{45}{9}\binom{5}{1}$ (2 pont)

A kérdezett valószínűség $\frac{\binom{45}{10} + \binom{45}{9}\binom{5}{1}}{\binom{50}{10}} \approx$ (1 pont)

$\approx \mathbf{0,742}$ (1 pont)

b) 0,9 annak a valószínűsége, hogy az első gépsoron készült (1 pont)

A kérdezett valószínűség $\binom{15}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^{13} \approx$ (2 pont)

$\approx \mathbf{0,267}$ (1 pont)

c) Jelölje A azt az eseményt, hogy az első gépsoron készült a pohár, B pedig azt az eseményt, hogy selejtes a pohár (1 pont)

$P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$ (1 pont)

$P(AB) = 0{,}6 \cdot 0{,}1 = 0{,}06$ (1 pont)

Ha összesen n pohár van, akkor $0{,}6 \cdot n \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot n \cdot 0{,}04 = 0{,}076n$ darab selejtes van köztük (2 pont)

Egy selejtes választásának valószínűsége $P(B) = \dfrac{0{,}076n}{n} = 0{,}076$ (1 pont)

Tehát $P(A|B) = \dfrac{0{,}06}{0{,}076} \approx \mathbf{0,789}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

17) Egy város 18 étterme közül 11-ben reggelit, 11-ben vegetáriánus menüt lehet kapni, és 10-ben van felszolgálás. Mind a 18 étterem legalább egy szolgáltatást nyújt az előző három közül. Öt étteremben adnak reggelit, de nincs vegetáriánus menü. Azok közül az éttermek közül, ahol reggelizhetünk, ötben van felszolgálás. Csak egy olyan étterem van, ahol mindhárom szolgáltatás megtalálható.

a) Hány étteremben ehet vegetáriánus menüt kapni, de reggelit nem? (5 pont)

b) Hány olyan étterem van, ahol felszolgálnak vegetáriánus menüt? (6 pont)

c) A Kiskakas étteremben minden vendég a fizetés után nyereménysorsoláson vehet részt. Két urnát tesznek elé, amelyekben golyócskák rejtik a város egy-egy éttermének nevét. Az *A* urnában a város összes vendéglőjének neve szerepel, mindegyik pontosan egyszer. A *B* urnában azoknak az éttermeknek a neve található – mindegyik pontosan egyszer - amelyikben nincs felszolgálás. A vendég tetszés szerint húzhat egy golyót. Ha a húzott étteremben van reggelizési lehetőség, akkor a vendég egy heti ingyen reggelit nyer, ha nincs, nem nyer. Melyik urnából húzva nagyobb a nyerés valószínűsége? (5 pont)

<u>Megoldás:</u>

a) *Lásd: Halmazok 5. feladat*

b) *Lásd: Halmazok 5. feladat*

c) Összesen 18 étterem van, ebből 11-ben lehet reggelizni. Az összes címet tartalmazó A urnából húzva $\dfrac{11}{18} \approx 0{,}61$ a nyerés valószínűsége (2 pont)

A 8 önkiszolgáló étterem közül 6-ban lehet reggelizni, így a B urnából húzva $\dfrac{6}{8} = 0{,}75$ a nyerés valószínűsége (2 pont)

tehát **a *B* urnából érdemes húzni.** (1 pont)

Összesen: 16 pont

18) **A következő táblázat egy 30 fős kilencedik osztály első félév végi matematikaosztályzatainak megoszlását mutatja.**

Érdemjegy	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**
Tanulók száma	**4**	**7**	**9**	**8**	**2**

a) Ábrázolják az eredmények eloszlását oszlopdiagramon! (3 pont)

b) Mennyi a jegyek átlaga? (2 pont)

c) Véletlenszerűen kiválasztjuk az osztály egy tanulóját. Mi a valószínűsége annak, hogy ez a tanuló legalább 3-ast kapott félév végén matematikából? (3 pont)

d) Két tanulót véletlenszerűen kiválasztva mennyi a valószínűsége annak, hogy érdemjegyeik összege osztható 3-mal? (8 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Statisztika 6. feladat*

b) *Lásd: Statisztika 6. feladat*

c) Legalább 3-ast $4+7+9=20$ tanuló kapott, így a kérdéses valószínűség $P=\frac{20}{30}=\mathbf{\frac{2}{3}}$ (3 pont)

d) Az osztályból 2 tanuló kiválasztására $\binom{30}{2}=435$ lehetőségünk van. (2 pont)

A kiválasztott tanulók osztályzatainak összege 3-mal osztható, ha az osztályzatok: $(1;2),(1;5),(2;4),(3;3),(4;5)$ (2 pont)

A kedvező esetek száma: $2\cdot 8+2\cdot 4+8\cdot 7+\binom{9}{2}+7\cdot 4=144$ (2 pont)

A keresett valószínűség $P=\frac{144}{435}=\frac{48}{145}\approx\mathbf{0{,}33}$ (2 pont)

Összesen: 16 pont

19) **Egy automatából 100 Ft értékű ital kapható, s az automatába csak 100 Ft-os érme dobható be. Az italautomata gyakran hibásan működik. 160 kísérletet végezve azt tapasztaljuk, hogy**

- **az esetek 18,75%-ában az automata elnyeli a pénzt és nem ad italt,**
- **90 esetben visszaadja a 100 forintost, anélkül, hogy italt adna**
- **30 esetben italt is ad és a 100 Ft-os érmét is visszaadja**
- **és csak a fennmaradó esetekben működik rendeltetésszerűen**

a) Mekkora annak az esélye az adatok alapján, hogy egy százast bedobva az automata rendeltetésszerűen fog működni? (4 pont)

b) Minek nagyobb az esélye: annak, hogy ingyen ihatunk, vagy annak, hogy ráfizetünk? (5 pont)

c) Várhatóan mennyi lesz a ráfizetése annak, aki 160-aszor próbál vásárolni ennél az automatánál? (4 pont)

Megoldás:

a)

Pénz visszaadja		Pénzt elnyeli	
Italt nem ad	Italt ad	Italt nem ad	Italt ad
30	90	$160\cdot 0{,}1875=30$	10

A 18,75% kiszámítása (1 pont)

10 esetben működik jól, a pénzt elnyeli és ad italt (1 pont)

Annak az esélye, hogy jól működik $\frac{10}{160}=\mathbf{0{,}0625}$ (2 pont)

b) 160 esetből 30-ban az ital mellé visszakapjuk a pénzt is, tehát $\frac{30}{160}=0{,}1875$ valószínűséggel ingyen jutunk italhoz (2 pont)

Ráfizetünk, ha nem kapjuk vissza a pénzt és italt sem kapunk. Ennek valószínűsége: $\frac{30}{160}=0{,}1875$ (2 pont)

Tehát **ugyanakkora a valószínűségük** (1 pont)

c) A 160 esetből 120 esetben visszaadja a pénzt (2 pont)

Mivel pontosan 40 esetben kapok italt, így a ráfizetés **0 Ft**, azaz nincs ráfizetés (2 pont)

Összesen: 13 pont

20) A dominókészleten a dominókövek mindegyikén az egy-egy „térfélen" elhelyezett pöttyök száma 0-tól egy megengedett maximális értékig bármilyen természetes szám lehet. A dominókövek két felén e számok minden lehetséges párosítása szerepel. Nincs két egyforma kő a készletben.

a) Igazolja, hogy ha a pöttyök maximális száma 7, akkor a dominókészlet 36 kőből áll. (5 pont)

b) A 36 kőből álló dominókészletből véletlenszerűen kiválasztottunk egy követ. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott kő két „térfelén" lévő pöttyök számának összege 8? (3 pont)

c) A 36 kőből álló dominókészletből ezúttal két követ választottunk ki véletlenszerűen. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két dominókő a játék szabályai szerint egymáshoz illeszthető? (Két dominókő összeilleszthető, ha van olyan „térfelük", amelyen a pöttyök száma ugyanannyi.) (8 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Kombinatorika 22. feladat*

b) Egy kő két „térfelén" levő pöttyök számának összege 8 a következőképpen lehet: $(1;7),(2;6),(3;5),(4;4)$ (1 pont)

tehát négyféleképpen (1 pont)

A keresett valószínűség $P=\frac{4}{36}=\mathbf{\frac{1}{9}}$ (1 pont)

c) 8 olyan dominó van, amelynek egyik térfelén nincs tipp. Ezek közül 2 db $\binom{8}{2}$-féleképpen választható ki (2 pont)

A 8 olyan dominó közül, amelyiknek egyik térfelén 1 db pötty van $\binom{8}{2}$-féleképpen választható ki 2 db. Ezt a gondolatmenetet folytatva $\binom{8}{2}$-féleképpen választható ki 2 db azon 8 dominó közül, amelyiknek az egyik térfelén 7 pötty van (2 pont)

A kedvező esetek száma $8\cdot\binom{8}{2}$ (1 pont)

Az összes esetek száma $\binom{36}{2}$ (1 pont)

A keresett valószínűség $\dfrac{8\cdot\binom{8}{2}}{\binom{36}{2}}=\mathbf{\dfrac{16}{45}}$ (2 pont)

Összesen: 16 pont

21) Egy új típusú sorsjegyből 5 millió darab készült, egy sorsjegy ára 200 Ft. Minden egyes sorsjegyen vagy a „Nyert" vagy a „Nem nyert" felirat található, és a nyertes sorsjegyen feltüntetik a nyertes szelvény tulajdonosa által felvehető összeget is. A gyártás során a mellékelt táblázat szerinti eloszlásban készült el az 5 millió sorsjegy.

sorsjegy (db)	nyeremény (Ft)
4	10 000 000
40	50 000
800	10 000
150 000	1 000
400 000	500
1 000 000	200
3 449 156	0

a) Ha minden sorsjegyet eladnának és a nyertesek minden nyereményt felvennének, akkor mekkora lenne a sorsjegyek eladásából származó bevétel és a kifizetett nyeremény különbözete? (3 pont)

b) Aki a kibocsátás után az első sorsjegyet megveszi, mekkora valószínűséggel nyer a sorsjegy áránál többet? (4 pont)

c) Számítsa ki, hogy ebben a szerencsejátékban az első sorsjegyet megvásárló személy nyereségének mennyi a várható értéke! (A nyereség várható értékének kiszámításához nemcsak a megnyerhető összeget, hanem a sorsjegy árát is figyelembe kell venni.) (4 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Szöveges feladatok 11. feladat*

b) Az 5 millió sorsjegy bármelyikét egyenlő valószínűséggel húzhatjuk
A kedvező esetek száma 550844 (2 pont)

Tehát a keresett valószínűség: $p=\dfrac{550844}{5\cdot10^6}\approx\mathbf{0{,}11}$ (2 pont)

c) *Lásd: Szöveges feladatok 11. feladat*

Összesen: 11 pont

22) Adott két párhuzamos egyenes, *e* és *f*. Kijelölünk *e*-n 5, *f*-en pedig 4 különböző pontot.

a) Hány (*e*-től és *f*-től is különböző) egyenest határoz meg ez a 9 pont? Hány olyan háromszög van, amelynek mindhárom csúcsa a megadott 9 pont közül kerül ki? Hány olyan négyszög van, amelynek mindegyik csúcsa a megadott 9 pont közül kerül ki? (11 pont)

b) A 9 pont mindegyikét véletlenszerűen kékre vagy pirosra színezzük. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az *e* egyenes 5 pontja is azonos színű és az *f* egyenes 4 pontja is azonos színű lesz? (5 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Kombinatorika 23. feladat*

b) Az egyenlően valószínű színezések száma: 2^9 (2 pont)
Az e egyenesen és az f egyenesen is kétféleképpen lehet egyforma színű az összes megjelölt pont (1 pont)
Tehát 4 kedvező eset van (1 pont)

A kérdezett valószínűség így: $\mathbf{\dfrac{4}{2^9}=0{,}0078}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

23) **Egy üzemben 4000 cm3-es, négyzet alapú, egyenes hasáb alakú, felül nyitott sütőedények gyártását tervezik. Az edények külső felületét tűzálló zománcfestékkel vonják be. (A belső felülethez más anyagot használnak.)**

a) Számítsa ki, mekkora felületre kellene tűzálló zománcfesték egy olyan edény esetén, amelynek oldallapjai 6,4 cm magasak! (3 pont)

b) Az üzemben végül úgy határozták meg az edények méretét, hogy a gyártásukhoz a lehető legkevesebb zománcfestékre legyen szükség. Számítsa ki a gyártott edények alapélének hosszát! (9 pont)

c) Minőségellenőrzési statisztikák alapján ismert: 0,02 annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott edény selejtes. Egy áruházláncnak szállított 50 darabos tételben mekkora valószínűséggel lesz pontosan 2 darab selejtes? (4 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Térgeometria 15. feladat*

b) *Lásd: Térgeometria 15. feladat*

c) Egy edényt véletlenszerűen kiválasztva az 0,02 valószínűséggel lesz selejtes, tehát 0,98 valószínűséggel jó. (1 pont)

A kérdéses valószínűség a binomiális eloszlás alapján számolható (1 pont)

$P(2 \text{ selejtes}) = \binom{50}{2} \cdot 0{,}002^2 \cdot 0{,}98^{48}$ (1 pont)

$P(2 \text{ selejtes}) \approx \mathbf{0{,}186}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

24)

a) A következő két állításról döntse el, hogy igaz vagy hamis. Válaszait indokolja! (6 pont)

- **Van olyan ötpontú egyszerű gráf, amelynek 11 éle van.**
- **Ha egy ötpontú egyszerű gráf minden csúcsa legalább harmadfokú, akkor biztosan van negyedfokú csúcsa is.**

b) Az *A, B, C, D* és *E* pontok egy ötpontú teljes gráf csúcsai. A gráf élei közül véletlenszerűen beszínezünk hatot. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az *A, B, C, D, E* pontokból és a színezett élekből álló gráf nem lesz összefüggő? (10 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Gráfelmélet 2. feladat*

b) Ha úgy színeztünk be 6 élt, hogy kaptunk egy négypontú teljes részgráfot és egy izolált pontot, akkor ez a gráf nem összefüggő, tehát jó. (2 pont)

Másképp nem kaphattunk nem összefüggő gráfot, hiszen ha egy két- és egy hárompontú komponense lenne, akkor legfeljebb 4 él lehetne. (2 pont)

Az első típushoz ötféleképpen választhatjuk ki az izolált pontot, és ez már meghatározza a 6 beszínezhető élt, tehát az ilyen gráfok száma 5. (2 pont)

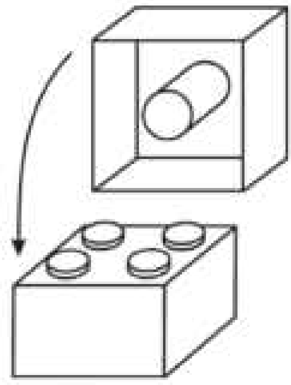
Az ötpontú teljes gráfnak 10 éle van. (1 pont)

Ezek közül $\binom{10}{6}$ féleképpen választhatjuk ki a 6 kiszínezendő élt. (2 pont)

A keresett valószínűség tehát $p = \frac{5}{210} \approx \mathbf{0{,}024}$. (1 pont)

Összesen: 16 pont

25) **Egy építőkészletben a rajzon látható négyzetes hasáb alakú elem is megtalálható. Két ilyen építőelem illeszkedését az egyik elem tetején kiemelkedő négy egyforma kis henger és a másik elem alján lévő nagyobb henger szoros, érintkező kapcsolata biztosítja. (Ez azt jelenti, hogy a hengerek tengelyére merőleges síkmetszetben a nagyobb kört érinti a négy kisebb kör, amelyek középpontjai egy négyzetet határoznak meg.) Tudjuk, hogy a kis hengerek sugara 3 mm, az egymás melletti kis hengerek tengelyének távolsága pedig 12 mm.**



a) Mekkora a nagyobb henger átmérője? Válaszát milliméterben, két tizedesjegyre kerekítve adja meg! (5 pont)

A készletben az építőelemek kék vagy piros színűek. Péter 8 ilyen elemet egymásra rak úgy, hogy több piros színű van köztük, mint kék. Lehet, hogy csak az egyik színt használja, de lehet, hogy mindkettőt.

b) Hányféle különböző szín összeállítású 8 emeletes tornyot tud építeni? (4 pont)

A gyárban (ahol ezeket az építőelemeket készítik) nagyon ügyelnek a pontosságra.

Egymillió építőelemből átlagosan csupán 20 selejtes. András olyan készletet szeretne vásárolni, melyre igaz a következő állítás: *0,01-nál kisebb annak a valószínűsége, hogy a dobozban található építőelemek között van selejtes.*

c) Legfeljebb hány darabos készletet vásárolhat András? (7 pont)

<u>Megoldás</u>:

a) *Lásd: Térgeometria 17. feladat*

b) A piros elemek száma 5, 6, 7 vagy 8 lehet (1 pont)

Ha a piros elemek száma k, akkor az építhető tornyok száma $\binom{8}{k}$ (1 pont)

Így az ilyen tornyok száma összesen:

$\binom{8}{5}+\binom{8}{6}+\binom{8}{7}+\binom{8}{8}=(56+28+8+1)=\mathbf{93}$ (2 pont)

c) Annak a valószínűsége, hogy egy kiválasztott kocka nem selejtes

$\frac{1000000-20}{1000000}=0,99998$ (1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy egy n kockát tartalmazó dobozban egyik kocka sem selejtes $0,99998^n$ (1 pont)

Ha annak a valószínűsége, hogy a dobozban van selejtes kisebb 0,01-nál, akkor annak a valószínűsége, hogy a dobozban nincs selejtes, legalább 0,99

(1 pont)

Megoldandó a $0,99998^n \geq 0,99 \quad (n \in \mathbb{N})$ (1 pont)

A logaritmus függvény szigorú monotonitása miatt

$n \cdot \lg 0,99998 \geq \lg 0,99$ (1 pont)

Ebből $n \leq \frac{\lg 0,99}{\lg 0,99998} \approx 502,5$ (1 pont)

Tehát András legfeljebb **502 darabos** készletet vehetett (1 pont)

Összesen: 16 pont

26) **Egy dobozban 17 darab egyforma sugarú golyó van. A golyók közül 8 darab sárga és 9 darab zöld.**

a) Visszatevés nélkül kihúzunk a dobozból 3 golyót. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott 3 golyó egyszínű? (4 pont)

b) Ha úgy húzunk ki a dobozból 5 golyót, hogy a kivett golyót minden egyes húzás után visszatesszük, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy 3 alkalommal sárga golyót, 2 alkalommal pedig zöld golyót húzunk? (4 pont)

c) A golyók meg vannak számozva 1-től 17-ig. Mennyi annak a valószínűsége, hogy visszatevés nélkül 3 golyót kihúzva a golyókon található számok összege osztható 3-mal? (8 pont)

Válaszait három tizedesjegyre kerekítve adja meg!

Megoldás:

a) Az összes kihúzási lehetőségek száma $\binom{17}{3}$ (1 pont)

Három sárga golyót $\binom{8}{3}$ féleképpen, három zöldet pedig $\binom{9}{3}$ féleképpen húzhatunk ki (1 pont)

A kedvező esetek száma így $\binom{8}{3}+\binom{9}{3}$ (1 pont)

A keresett valószínűség $\dfrac{\binom{8}{3}+\binom{9}{3}}{\binom{17}{3}}=\dfrac{7}{34}\approx \mathbf{0,206}$ (1 pont)

b) Sárga golyó húzásának valószínűsége $\dfrac{8}{17}$

Zöld golyó húzásának valószínűsége $\dfrac{9}{17}$ (1 pont)

A kérdéses valószínűség binomiális eloszlást követ (1 pont)

Ezért $p=\binom{5}{3}\cdot\left(\dfrac{8}{17}\right)^3\cdot\left(\dfrac{9}{17}\right)^2\approx \mathbf{0,292}$ (2 pont)

c) A kihúzott három szám összege pontosan akkor osztható 3-mal, ha vagy mindhárom ugyanazt a maradékot adja 3-mal osztva, vagy 3-as maradékaik páronként különbözik (2 pont)

0 maradékot a 3, 6, 9, 12, 15 számok adnak, közülük három szám húzása a következő képen lehetséges: $\binom{5}{3}$ (1 pont)

1 maradékot adnak az 1, 4, 7, 10, 13, 16 számok, itt $\binom{6}{3}$ féleképpen lehetséges, mint a 2 maradékot adó 2, 5, 8, 11, 14, 17 esetében (2 pont)

A páronként különböző maradékot adó húzások száma $5\cdot 6^2$ (1 pont)

A kedvező esetek száma $\binom{5}{3}+2\cdot\binom{6}{3}+5\cdot 6^2$ (1 pont)

Mivel az összes esetek száma $\binom{17}{3}$, ezért a keresett valószínűség:

$p = \frac{230}{680} \approx \mathbf{0,338}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

27) Egy iskola alapítványi bálján a korábban szokásos tombolahúzás helyett egy egyszerű lottóhúzást szerveznek. A szelvényt vásárolóknak az első tíz pozitív egész szám közül kellett ötöt megjelölniük. Húzáskor öt számot sorsolnak ki (az egyszer már kihúzott számokat nem teszik vissza). Egy lottószelvény 200 Ft-ba kerül. Egy telitalálatos szelvénnyel 5000 Ft értékű, egy négytalálatos szelvénnyel 1000 Ft értékű, az alapítvány által vásárolt könyvutalványt lehet nyerni. Négynél kevesebb találatot elérő szelvénnyel nem lehet nyerni semmit.

a) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a legkisebb kihúzott szám 3. (3 pont)

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a számokat növekvő sorrendben húzzák ki? (4 pont)

Az *a*) és *b*) kérdésekre adott válaszait három tizedesjegyre kerekítve adja meg!

c) Számolással igazolja, hogy (három tizedesjegyre kerekítve) a telitalálat valószínűsége 0,004, a négyes találat valószínűsége 0,099. (4 pont)

d) Ha a húzás előtt 240 szelvényt adtak el, akkor mekkora az alapítvány lottóhúzásból származó hasznának várható értéke?(5 pont)

Megoldás:

a) Az összes eset száma $\binom{10}{5}(=252)$, a kedvező esetek száma $\binom{7}{4}(=35)$, (2 pont)

így a kérdéses valószínűség: $p = \frac{\binom{7}{4}}{\binom{10}{5}} \approx \mathbf{0,139}$ (A 13,9% is elfogadható válaszként) (1 pont)

b) Bármelyik öt szám húzása esetén bármelyik húzási sorrend egyenlően valószínű. (1 pont)

Adott öt szám esetén ezek száma $5!(=120)$. (1 pont)

Ezek közül egy húzási sorrend növekvő. (1 pont)

A keresett valószínűség $p = \frac{1}{5!} \approx \mathbf{0,008}$. (1 pont)

c) A telitalálat valószínűsége: $p_5 = \frac{1}{\binom{10}{5}} = \frac{1}{252} \approx \mathbf{0,004}$ (1 pont)

Négy találat esetén a kedvező esetek száma: $\binom{5}{4} \cdot \binom{5}{1} = 25$, (2 pont)

így a négy találat valószínűsége: $p_4 = \frac{25}{\binom{10}{5}} = \frac{25}{252} \approx \mathbf{0,099}$ (1 pont)

d) A szelvények eladásából származó bevétel: $240 \cdot 200 = 48000$ (Ft) (1 pont)

Egy szelvényre vonatkozóan a kiadás várható értéke:

$p_5 \cdot 5000 + p_4 \cdot 1000 = 0{,}004 \cdot 5000 + 0{,}099 \cdot 1000 = 119$ (Ft) (2 pont)

Az eladott összes szelvényre a kiadás várható értéke: $240 \cdot 119 = 28560$ (Ft) (1 pont)

Így az alapítvány hasznának várható értéke: $48000 - 28560 =$ **19440 Ft** (1 pont)

Összesen: 16 pont

28) Egy körvonalon felvettünk öt pontot, és behúztuk az általuk meghatározott 10 húrt. Jelölje a pontokat pozitív körüljárási irányban rendre *A*, *B*, *C*, *D* és *E*.

a) Véletlenszerűen kiválasztunk 4 húrt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek a húrok egy konvex négyszöget alkotnak? (4 pont)

b) Hányféleképpen juthatunk el a húrok mentén *A*-ból *C*-be, ha a *B*, *D*, és *E* pontok mindegyikén legfeljebb egyszer haladhatunk át? (Az *A* pontot csak az út kezdetén, a *C* pontot csak az út végén érinthetjük.) (4 pont)

c) A 10 húr mindegyikét kiszínezzük egy-egy színnel, pirosra vagy sárgára, vagy zöldre. Hány olyan színezés van, amelyben mindhárom szín előfordul? (8 pont)

Megoldás:

a) Akkor kapunk négy megfelelő húrt, ha a végpontjaik között az ötből pontosan négy különböző szerepel. A körüljárási iránynak megfelelően minden kiválasztott pontnégyeshez pontosan egy konvex négyszög tartozik. (1 pont)

Öt pontból négyet ötféleképpen lehet kiválasztani, ezért a kedvező esetek száma 5. (1 pont)

Az összes eset száma: $\binom{10}{4}$. (1 pont)

A keresett valószínűség: $\boldsymbol{p = \frac{5}{\binom{10}{4}} = \frac{1}{42} (\approx 0{,}024)}$. (1 pont)

b) *Lásd: Kombinatorika 27. feladat*

c) *Lásd: Kombinatorika 27. feladat*

Összesen: 16 pont

29) Egy üzemben olyan digitális műszert gyártanak, amely kétféle adat mérésére alkalmas: távolságot és szöget lehet vele meghatározni. A gyártósor meghibásodott, de ezt hosszabb ideig nem vették észre. Ezalatt sok mérőeszközt gyártottak, ám ezeknek csak a 93%-a adja meg hibátlanul a szöget, a 95%-a méri hibátlanul a távolságot, sőt a gyártott mérőeszközök 2%-a mindkét adatot hibásan határozza meg.

a) Az egyik minőségellenőr 20 darab műszert vizsgál meg visszatevéses mintavétellel a meghibásodási időszak alatt készült termékek közül. Mekkora annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 2 darab hibásat talál közöttük? (Egy műszert hibásnak tekintünk, ha akár a szöget, akár a távolságot hibásan méri.) (7 pont)

Vízszintes, sík terepen futó patak túlpartján álló fa magasságát kell meghatároznunk. A síkra merőlegesen álló fát megközelíteni nem tudjuk, de van egy kisméretű, digitális műszerünk, amellyel szöget és távolságot is pontosan tudunk mérni. A patakparton kitűzzük az *A* és *B* pontokat, amelyek 10 méterre vannak egymástól. Az *A* pontból $55°$-os, a *B*-ből $60°$-os emelkedési szög alatt látszik a fa teteje. Szögméréssel még megállapítjuk, hogy $ATB\sphericalangle = 90°$, ahol *T* a fa „talppontja”.

b) Milyen magas a fa? (9 pont)

Megoldás:

a) A műszerek 7%-a hibásan méri a szöget, 5%-a pedig hibásan méri a távolságot. (1 pont)

Mivel a műszerek 2%-a mindkét adatot hibásan méri, ezért a hibás műszerek aránya:

$5+7-2=10\%$ (1 pont)

Egy hibátlan műszer választásának valószínűsége tehát 0,9. (1 pont)

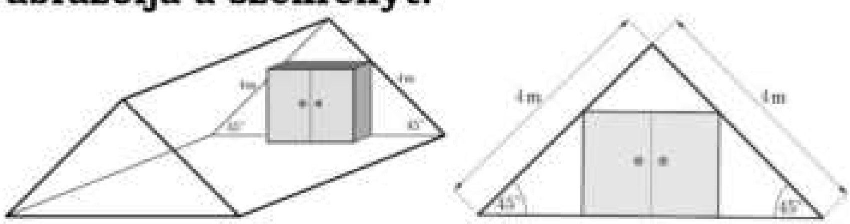
Akkor lesz köztük legfeljebb 2 hibás, ha a hibás műszerek száma 0, 1 vagy 2. (1 pont)

Annak a valószínűsége tehát, hogy a 20 kiválasztott műszer között legfeljebb 2 hibás lesz: $0,9^{20}+\binom{20}{1}\cdot 0,9^{19}\cdot 0,1+\binom{20}{2}\cdot 0,9^{18}\cdot 0,1^{2}$. (2 pont)

A kérdezett valószínűség megközelítőleg **0,677**. (1 pont)

b) *Lásd: Térgeometria 21. feladat*

30) Kovács úr a tetőterébe egy téglatest alakú beépített szekrényt készíttet. Két vázlatot rajzolt a terveiről az asztalosnak, és ezeken feltüntette a tetőtér megfelelő adatait is. Az első vázlat „térhatású”, a második pedig elölnézetben ábrázolja a szekrényt.



A tetőtér adottságai miatt a szekrény mélységének pontosan 60 cm-nek kell lennie.

a) Mekkora legyen a szekrény vízszintes és függőleges mérete (azaz a szélessége és a magassága), ha a lehető legnagyobb térfogatú szekrényt szeretné elkészíttetni? (A magasság, a szélesség és a mélység a szekrény külső méretei, Kovács úr ezekkel számítja ki a térfogatot.) (8 pont)

A szekrény elkészült. Az akasztós részébe Kovács úr vasárnap este 7 inget tesz be, a hét minden napjára egyet-egyet. Az ingek között van 2 fehér, 2 világoskék és 3 sárga. Reggelente nagyon siet, ezért Kovács úr csak benyúl a szekrénybe, és anélkül, hogy odanézne, véletlenszerűen kivesz egy inget.

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a hét első három napján vagy három különböző színű vagy három egyforma színű inget választ? (Ha valamelyik nap viselt egy inget, azt utána már nem teszi vissza a szekrénybe.) (8 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Térgeometria 22. feladat*

b) Az azonos színű ingeket megkülönböztetve az első három napon $7\cdot6\cdot5=210$ különböző lehetőség van a három ing kiválasztására. (1 pont)
Kedvező esemény az, ha valamilyen sorrendben mindegyik színből pontosan egyet vagy három sárga inget választott Kovács úr. (1 pont)
Egy adott színsorrendben $2\cdot2\cdot3=12$ különböző módon lehet három inget kiválasztani. (1 pont)
Három adott szín sorrendje 3!-féle lehet, tehát három különböző színű inget $2\cdot2\cdot3\cdot3!=72$ különböző módon választhat ki Kovács úr. (2 pont)
A három sárga inget 3! különböző sorrendben választhatja ki. (1 pont)
A kedvező esetek száma:
$2\cdot2\cdot3\cdot3!+3!=78$. (1 pont)
A kérdezett valószínűség tehát: $\frac{78}{210}=\frac{13}{35}\approx\mathbf{0,371}$. (1 pont)

Összesen: 16 pont

31) Egy kereskedőcég bevételei két forrásból származnak: bolti árusításból és internetes eladásból. Ebben az évben az internetes árbevétel 70%-a volt a bolti árbevételnek. A cég vezetői arra számítanak, hogy a következő években az internetes eladásokból származó árbevétel évente az előző évi internetes árbevétel 4%-ával nő, a bolti eladásokból származó árbevétel viszont évente az előző évi bolti árbevétel 2%-ával csökken.

a) Számítsa ki, hány év múlva lesz a két forrásból származó árbevétel egyenlő! (8 pont)

A cég ügyfélszolgálatának hosszú időszakra vonatkozó adataiból az derült ki, hogy átlagosan minden nyolcvanadik vásárló tér vissza később valamilyen minőségi kifogással.

b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy 100 vásárló közül legfeljebb kettőnek lesz később minőségi kifogása! (6 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Szöveges feladatok 21. feladat*

b) Annak a valószínűsége, hogy egy vevő reklamál: $\frac{1}{80}$,

annak a valószínűsége, hogy nem reklamál: $\frac{1}{79}$ (1 pont)

$P(\text{legfeljebb 2 reklamál})=P(\text{senki nem reklamál})+$ (1 pont)

$P(\text{1 reklamál})+P(\text{2 reklamál})=$

$$\left(\frac{79}{80}\right)^{100}+\binom{100}{1}\left(\frac{1}{80}\right)\left(\frac{79}{80}\right)^{99}+\binom{100}{2}\left(\frac{1}{80}\right)^{2}\left(\frac{79}{80}\right)^{98}\approx$$ (3 pont)

$(\approx\mathbf{0,2843+0,3598+0,2255})\approx\mathbf{0,87}$ (1 pont)

Összesen: 14 pont

32) Éva egy 7×7-es táblázat bal felső mezőjétől kezdve, balról jobbra haladva, sorról sorra beírta egy számtani sorozat első 49 tagját úgy, hogy a tagok sorrendjét nem változtatta meg. (A sorozat 1. tagja a bal felső sarokba került, a 8. tag a második sor első mezőjébe, a 49. tag pedig a jobb alsó sarokban áll.)

		91				
				11		

a) Mennyi a táblázatba írt 49 szám összege, ha Éva a harmadik sor harmadik mezőjébe 91-et, az ötödik sor ötödik mezőjébe pedig a 11-et írta? (5 pont)

Péter a táblázat minden sorából kiválasztja a számtani sorozat egy-egy tagját úgy, hogy a hét kiválasztott szám közül semelyik kettő ne legyen egy oszlopban.

b) Igazolja, hogy akárhogyan is választja ki Péter így a számokat, a hét szám összege minden esetben ugyanannyi lesz! (6 pont)

c) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a 91 és a 11 is a Péter által kiválasztott számok között lesz! (5 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Sorozatok 22. feladat*

b) *Lásd: Sorozatok 22. feladat*

c) Péter összesen $7! = 5040$-féleképpen választhat ki a táblázatból számokat a megadott szabály szerint. (1 pont)

Ha a 91 és a 11 is a kiválasztott számok közt van, akkor az első sorból 5-féleképpen választhat, ezután a másodikból 4-féleképpen, a negyedikből 3-féleképpen, a hatodikból 2-féleképpen, a hetedikből pedig1-féleképpen. (1 pont)

Ez $5! = 120$ lehetőség. (1 pont)

A kérdéses valószínűség így $\frac{120}{5040} \approx$ (1 pont)

$\approx \mathbf{0,024}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

33) Szétgurult 20 darab tojás az asztalon. Közülük 16 tojás ép maradt, de 4 tojásnak alig észrevehetően megrepedt a héja. Bori ezt nem vette észre, így visszarakosgatja a tojásokat a két tojástartóba. Először a sárga tartóba tesz tízet, majd a fehérbe a többit.

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy mind a 4 hibás tojás ugyanabba a tartóba kerül? (5 pont)

Csenge sokszor vásárol tojásokat a sarki üzletben. Megfigyelése szerint a tojások közül átlagosan minden ötvenedik törött. (Ezt úgy tekintjük, hogy a tojások mindegyike 0,02 valószínűséggel törött.)

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy 10 tojást tartalmazó dobozban egynél több törött tojást talál Csenge? (5 pont)

Egy csomagolóüzembe két termelő szállít tojásokat: az összes tojás 60%-a származik az A, 40%-a a B termelőtől. Az A termelő árujának 60%-a első osztályú, 40%-a másodosztályú, a B termelő árujának 30%-a első osztályú és 70%-a másodosztályú. Az összes beszállított tojás közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet, és azt első osztályúnak találjuk.

c) Mekkora a valószínűsége, hogy az A termelő árujából való a kiválasztott tojás? (6 pont)

Megoldás:

a) A 4 hibás és 6 ép tojás a sárga tojástartóba $\binom{4}{4}\cdot\binom{16}{6}=8008$-féleképpen kerülhet. (1 pont)

Az összes eset száma: $\binom{20}{10}=184756$ (1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy mind a 4 tojás a sárga dobozba kerül: $p=\frac{\binom{4}{4}\cdot\binom{16}{6}}{\binom{20}{10}}\approx 0{,}0433$. (1 pont)

Mivel a 4 hibás tojás a fehér tojástartóba is kerülhet, ezért a kérdéses valószínűség ennek kétszerese, azaz közelítőleg **0,087.** (2 pont)

b) Annak a valószínűsége, hogy egy tojás ép: 0,98. (1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy Csenge nem talál törött tojást a dobozban: $0{,}98^{10}\ (\approx 0{,}817)$. (1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy Csenge egy darab törött tojást talál a dobozban: $\binom{10}{1}\cdot 0{,}98^{9}\cdot 0{,}02\ (\approx 0{,}167)$. (1 pont)

Így a kérdéses valószínűség: $p=1-0{,}98^{10}-10\cdot 0{,}98^{9}\cdot 0{,}02\approx$ (1 pont)

$\approx \mathbf{0{,}016}$. (1 pont)

c) Az *A* beszállítótól származó első osztályú tojások száma az összesnek 36%-a. (1 pont)

A *B* beszállítótól származó első osztályú tojások száma az összesnek 12%-a. (1 pont)

Az összes beszállított tojásnak a 48%-a első osztályú. (1 pont)

Az első osztályú tojások $\frac{0{,}36}{0{,}48}\cdot 100\%=75\%$-a származik az *A* beszállítótól. (2 pont)

A kérdezett valószínűség tehát **0,75.** (1 pont)

Összesen: 16 pont

34) Dani sportlövészedzés jár, ahol koronglövészetet tanul. AZ első félév végén kiderült, hogy még elég bizonytalanul céloz: húsz lövésből átlagosan ötször találja el a repülő agyagkorongot. (Tekintsük ezt úgy, hogy minden lövésnél $\frac{5}{20}$ az esélye annak, hogy Dani találatot ér el.)

a) Mekkora annak az esélye az első félév végén, hogy nyolc egymás után leadott lövésből legalább háromszor célba talál? Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg! (5 pont)

b) Az első félév végén legalább hány egymás után leadott lövés kell ahhoz, hogy Dani legalább 95%-os eséllyel legalább egyszer eltalálja a repülő korongot? (6 pont)

A rendszeres edzéseknek köszönhetően Dani eredményessége javult. A második félév végén már 0,72 volt annak a valószínűsége, hogy három egymás után leadott lövésből pontosan egy vag pontosan két találatot ér el.

c) Számítsa ki, hogy a második félév végén mekkora valószínűséggel ér el találatot egy lövésből Dani! (5 pont)

Megoldás:

a) $P(\text{legalább 3 találat}) = 1 - \left[P(0 \text{ találat}) + P(1 \text{ találat}) + P(2 \text{ találat})\right] =$ (1 pont)

$P(0 \text{ találat}) = 0,75^8 \,(\approx 0,1001)$ (1 pont)

$P(1 \text{ találat}) = \binom{8}{1} \cdot 0,25 \cdot 0,75^7 \,(\approx 0,2670)$ (1 pont)

$P(2 \text{ találat}) = \binom{8}{2} \cdot 0,25^2 \cdot 0,76^6 \,(\approx 0,3115)$ (1 pont)

$P(\text{legalább 3 találat}) \approx \mathbf{0,321}$ (1 pont)

b) $P(\text{leaglább 1 találat}) = 1 - P(0 \text{ találat})$ (1 pont)

$1 -,75^n \geq 0,95$ (1 pont)

rendezve $0,75^n \leq 0,05$ (1 pont)

$n \cdot \lg 0,75 \leq \lg 0,05$ (1 pont)

(Mivel $\lg 0,75 < 0$, így) $n \geq \frac{\lg 0,05}{\lg 0,75} \approx 10,41$ (1 pont)

Daninak legalább **11 lövésre** van szüksége. (1 pont)

c) (Ha a második félév végén Dani egy lövésből p való- színűséggel ért el találatot, akkor három lövésből a pontosan egy vagy pontosan két találat valószínűsége) $P(1 \text{ találat}) + P(2 \text{ találat}) = 3p^2(1-p) + 3p(1-p)^2 =$ (1 pont)

$= 3p(1-p) = 0,72$ (1 pont)

$0 = 3p^2 - 3p + 0,72$ (1 pont)

Ebből p = 0,4, vagy p = 0,6 (1 pont)

A második félév végén tehát egy lövésből Dani **0,4 vagy 0,6 valószínűséggel** (azaz $\frac{8}{20}$ vagy $\frac{12}{20}$ eséllyel) ért el találatot. (1 pont)

Összesen: 16 pont

35) A *H* halmaz egy nyolcpontú egyszerű gráfok halmaza. A következő állítás a *H* elemeire vonatkozik: Ha egy (nyolcpontú egyszerű) gráf minden pontjának fokszáma legalább 3, akkor a gráf összefüggő.

a) Döntse el, hogy az állítás igaz vagy hamis! Válaszát indokolja! (3 pont)

b) Fogalmazza meg az állítás megfordítását a *H* elemeire vonatkozóan, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja! (3 pont)

Az *ABCDE* konvex ötszög csúcsait piros, kék vagy zöld színűre színezzük úgy, hogy bármely két szomszédos csúcsa különböző színű legyen.

c) Hány különböző színezés lehetséges? (Az ötszög csúcsait megkülönböztetjük egymástól.) (5 pont)

Egy négypontú teljes gráf élei közül véletlenszerűen kiválasztott négy élt kiszínezünk zöldre (teljes gráf: olyan egyszerű gráf, melynek bármely két pontja között van él.)

d) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a zöldre színezett élek a gráf egy négypontú körének élei! (5 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Gráfelmélet 5. feladat*
b) *Lásd: Gráfelmélet 5. feladat*
c) *Lásd: Kombinatorika 36.feladat*

d) Egy négypontú teljes gráfnak $\binom{4}{2}=6$ éle van. (1 pont)

Ezek közül 4 élt $\binom{6}{4}=15$-féleképpen lehet kiválasztani. (Ez az összes esetek száma.) (1 pont)

Ha a zöld élek kört alkotnak, akkor a 2 nem zöld él a gráf két-két különböző pontját köti össze. (1 pont)

A két nem zöld él kiválasztása 3-féleképpen történhet; ez a kedvező esetek száma. (Ha a gráf csúcsai *A*, *B*, *C*, *D*, akkor a megfelelő kiválasztások: *AB*-*CD*, *AC*-*BD*, *AD*-*BC*.) (1 pont)

A keresett valószínűség: $\boldsymbol{p=\frac{3}{15}=0{,}2}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

36) Egy dobozban 6 fehér és 4 piros golyó van. A 10 golyó közül véletlenszerűen kiválasztanak 5 golyót. Egy tanuló ezt állítja: *„Annak a valószínűsége, hogy az 5 kihúzott golyó között 2 fehér lesz, megegyezik annak a valószínűségével, hogy 4 fehér lesz közöttük.”*

a) Mutassa meg, hogy ha a golyókat visszatevés nélkül húzzák ki, akkor a tanuló ki-jelentése igaz! (5 pont)

b) A valószínűségek kiszámításával mutassa meg, hogy ha az 5 golyót visszatevéssel húzzák ki, akkor a tanuló kijelentése nem igaz!(5 pont)

Megoldás:

a) Az összes eset száma $\binom{10}{5}(=252)$. (1 pont)

Az (egyszerre) kihúzott 5 golyó között 2 fehér golyó $\binom{6}{2}\binom{4}{3}$ különböző módon fordulhat elő. (1 pont)

Az (egyszerre) kihúzott 5 golyó között 4 fehér golyó $\binom{6}{4}\binom{4}{1}$ különböző módon fordulhat elő. (1 pont)

A két valószínűség: $\dfrac{\binom{6}{2}\binom{4}{3}}{\binom{10}{5}}$,illetve $\dfrac{\binom{6}{4}\binom{4}{1}}{\binom{10}{5}}$. (1 pont)

Ez a két valószínűség egyenlő $\left(\frac{5}{12}\approx 0{,}238\right)$, tehát **a tanuló kijelentése igaz**.

(1 pont)

b) A fehér golyó húzásának (állandó) valószínűsége 0,6, a piros golyóé 0,4. (1 pont)

2 fehér golyó húzásának a valószínűsége $\binom{5}{2}\cdot 0{,}6^2\cdot 0{,}4^3$ (1 pont)

4 fehér golyó húzásának a valószínűsége $\binom{5}{4}\cdot 0{,}6^4\cdot 0{,}4$ (1 pont)

A két valószínűség (három tizedesjegyre kerekítve) 0,230, illetve 0,259. (1 pont)
A két valószínűség különbözik, **a tanuló kijelentése ebben az esetben nem igaz.** (1 pont)

Összesen 10 pont

37)

a) Legyen *G* egy nyolcpontú egyszerű gráf, amelynek összesen 9 éle van. Igazolja, hogy *G* csúcsai között biztosan van olyan, amelynek a fokszáma legalább 3. (4 pont)

b) Az *A, B, C, D, E, F, G, H* pontok egy szabályos nyolcszög csúcsai. Megrajzoljuk a nyolcszög oldalait és átlóit. A megrajzolt szakaszok közül véletlenszerűen kiválasztunk négyet. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy mind a négy kiválasztott szakasz az *A* csúcsból indul ki! (6 pont)

c) Nyolc sakkozó részére egyéni bajnokságot szerveznek. Hányféleképpen készíthető el az első forduló párosítása, ha ebben a fordulóban mindenki egy mérkőzést játszik? (Két párosítást különbözőnek tekintünk, ha az egyik tartalmaz olyan mérkőzést, amelyet a másik nem.) (6 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Gráfelmélet 6. feladat*

b) Egy szabályos nyolcszög oldalai és átlói számának összege 28. (1 pont)

Egy csúcsból összesen 7 szakasz indul. (1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy az első, második, harmadik, majd negyedik kiválasztott szakasz is az *A* csúcsból indul, rendre $\frac{7}{28}$, $\frac{6}{27}$, $\frac{5}{26}$, majd $\frac{4}{25}$. (2 pont)

A kérdéses valószínűség ezek szorzata, tehát $\frac{7}{28}\cdot\frac{6}{27}\cdot\frac{5}{26}\cdot\frac{4}{25}=$ (1 pont)

$=\mathbf{\frac{1}{585}}(\approx \mathbf{0{,}0017})$. (1 pont)

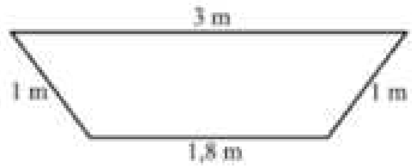
c) *Lásd: Kombinatorika 37. feladat*

Összesen16 pont

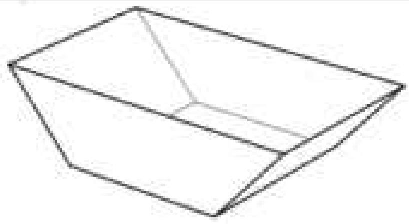
38) Egy kisüzemi meggymagozó-adagoló gép 0,01 valószínűséggel nem távolítja el a magot a meggyből, mielőtt a meggyszemet az üvegbe teszi. A magozógépen áthaladt szemek közül 120-120 darab kerül egy-egy üvegbe.

a) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy kiválasztott üvegben legalább 2 darab magozatlan szem van! (5 pont)

A termelés során keletkezett hulladékot nagy méretű konténerbe gyűjtik, melyet minden nap végén kiürítenek és kitisztítanak. A konténer egyenes hasáb alakú. A hasáb magassága 2 m, alaplapja húrtrapéz, melynek méretei az 1. ábrán láthatók. A konténert vízszintes felületen, az 1,8 m×2 m-es (tégla-lap alakú) lapjára állítva helyezik el (lásd a 2. ábrát).



1. ábra


2. ábra

b) Számítsa ki a hasáb térfogatát! Határozza meg, hogy milyen magasan áll a konténerben a tisztításához beletöltött 2,7 m³ térfogatú folyadék! (11 pont)

Megoldás:

a) 0,99 annak a valószínűsége, hogy egy adott szem meggyből az automata eltávolítja a magot. (1 pont)

A komplementer esemény:

(0 vagy 1 mag kerül az üvegbe) valószínűsége $0{,}99^{120}+\binom{120}{1}\cdot 0{,}01\cdot 0{,}99^{119}$.

(2 pont)

Ezért a kérdezett valószínűség: $1-0{,}99^{120}-\binom{120}{1}\cdot 0{,}01\cdot 0{,}99^{119}$, (1 pont)

ami körülbelül **0,34**. (1 pont)

b) *Lásd: Térgeometria 25. feladat*

Összesen16 pont

39) A laptopokban is használt B típusú lítiumion-akkumulátorok tölteskapacitása minden teljes töltési ciklusnál az előző értékének körülbelül 0,06%-ával csökken.

a) Hány százalékkal csökkent az új akkumulátor töltéskapacitása, ha 350 teljes töltési ciklust végeztek vele? (4 pont)

Egy B típusú akkumulátorral minden évben körülbelül 200 teljes töltési ciklust végeznek. (Tételezzük fel, hogy két töltési ciklus között mindig ugyanannyi idő telik el.)

b) Mennyi a felezési ideje a kezdetben új akkumulátor töltéskapacitásának (azaz töltési kapacitása mennyi idő alatt csökken a felére)? (6 pont)

Egy használt laptop-akkumulátorokat árusító üzletben a 25 azonos típusú akkumulátor töltéskapacitása 60% és 80% között van, de közülük csak 10-nek kisebb a töltéskapacitása 70%-nál. Egy vevő a 25 akkumulátor közül hármat vásárol meg.

c) Ha a három akkumulátort véletlenszerűen választja ki, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy legfeljebb az egyiknek lesz 70%-nál kisebb a töltéskapacitása? (6 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Szöveges feladatok 22. feladat*

b) *Lásd: Szöveges feladatok 22. feladat*

c) Annak a valószínűségét keressük, hogy a vevő 0 vagy 1 darab 70%-nál kisebb töltéskapacitású akkumulátort vásárol. (1 pont)

3 akkumulátort összesen $\binom{25}{3}(=2300)$-féleképpen vásárolhat. (1 pont)

70%-nél kisebb kapacitású akkumulátorból 0 darabot $\binom{15}{3}(=455)$-féleképpen, (1 pont)

1 darabot $\binom{10}{1}\cdot\binom{15}{2}(=1050)$-féleképpen vásárolhat. (1 pont)

A kérdezett valószínűség $\frac{455+1050}{2300}=$ (1 pont)

$\left(=\frac{301}{460}\right)\approx \mathbf{0{,}654}$. (1 pont)

Összesen: 16 pont

40) A Téglácska csokiszelet gyártója akciót indít: ha a szerencsés vásárló a csokiszelet csomagolásának belsö oldalán a „Nyert” feliratot találja, akkor ezzel egy újabb szelet csokit nyert. A gyártó úgy reklámozza a termékét, hogy „minden ötödik csoki nyer”. (Ez úgy tekinthető, hogy minden egyes csoki 0,2 valószínűséggel nyer.)

a) Juli öt szelet csokoládét vásárol. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az öt szelet csoki között legalább egy nyerő csoki lesz? (4 pont)

Pali is öt szelet csokoládét vásárolt, és végül hét szelet csokival tért haza a boltból, mert nyert még kettőt.

b) Vizsgálja meg, hogy az alábbi két esemény közül melyiknek nagyobb a valószínűsége!

I. Ha valaki megvásárol öt szelet csokit, akkor azok között két nyerő csoki lesz, de a két nyereménycsoki egyike sem nyer.

II. Ha valaki megvásárol öt szelet csokit, akkor azok között egy nyerő csoki lesz, a nyereménycsoki nyer egy hetedik szelet csokit, de az már nem nyer. (7 pont)

Egy másik akcióban a csokiszelet térfogatát 20%-kal megnövelték, de továbbra is változatlan áron adták. A csokiszelet téglatest alakú, az eredeti és a megnövelt szelet (matematikai értelemben) hasonló. Az akciós szelet 1 cm-rel hosszabb az eredeti csokiszeletnél.

c) Határozza meg az eredeti csokiszelet hosszúságát! Válaszát egész cm-re kerekítve adja meg! (5 pont)

Megoldás:

a) $P(\text{nem nyerő csoki})=0,8$ (1 pont)

$P(\text{legalább egy nyerő})=1-P(\text{egyik sem nyerő})=$ (1 pont)

$1-0,8^5\ (=1-0,32768)\approx$ (1 pont)

$\approx \mathbf{0{,}672}$ (1 pont)

b) $P(2 \text{ nyerő csoki}) = \binom{5}{2} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^3 = 0,2048$ (1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy a két megnyert csoki egyike sem nyer:
$0,8^2 = 0,64$ (1 pont)
(A két esemény független, így) az I. esemény valószínűsége
$p_1 = 0,2048 \cdot 0,64 \approx 0,131.$ (1 pont)
$P(1 \text{ nyerő csoki}) \binom{5}{1} \cdot 0,2 \cdot 0,8^4 = 0,4096$ (1 pont)
Annak a valószínűsége, hogy a megnyert csokival nyer egy hetedik csokit, amelyik viszont már nem nyer többet: $0,2 \cdot 0,8 = 0,16$. (1 pont)
(A két esemény független, így) a II. esemény valószínűsége
$p_2 = 0,4096 \cdot 0,16 \approx 0,066$. (1 pont)
Az I. esemény valószínűsége a nagyobb. (1 pont)

c) *Lásd: Síkgeometria 27. feladat*

Összesen: 16 pont

41) Egy baktériumtenyészet szaporodását laboratóriumi körülmények között vizsgálják. Az első órában 4 mikrocellát fertőznek meg baktériumokkal. A második órában a baktériumok szaporodni kezdenek, így további 3 cella fertőződik meg. A megfigyelés szerint ezután „szabályszerűvé" válik a baktériumok szaporodása: minden órában annyi új fertőzött cella keletkezik, ahány korábban összesen volt. (A harmadik órában $4+3=7$ új fertőzött mikrocella keletkezik, a negyedik órában 14, és így tovább.)

a) Ha a baktériumok szaporodásához továbbra is biztosítanánk a megfelelő körülményeket, akkor az összes fertőzött mikrocella száma hányadik órában haladná meg a tízmilliót? (8 pont)

A biológiaórán egy kezdetben tízmilliós baktériumhalmaznak a környezethez való alkalmazkodását modellezik a tanulók. Egy szabályos dobókockával dobnak, és ha a dobás eredménye 1, 2 vagy 3, akkor egymillió baktérium elpusztul. Ha a dobás eredménye 4 vagy 5, akkor nem történik semmi. Ha a dobás eredménye 6, akkor újabb egymillió baktérium keletkezik. A dobást többször egymás után megismétlik.

b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy hét dobás után a baktériumok száma legfeljebb ötmillió lesz! (8 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Szöveges feladatok 23. feladat*

b) A modell szerint mindegyik dobásnál vagy $\frac{1}{2}$ valószínűséggel elpusztul egymillió baktérium, vagy $\frac{1}{6}$ valószínűséggel egymillióval nő, vagy $\frac{1}{3}$ valószínűséggel változatlan marad a baktériumok száma. (1 pont)
Legfeljebb ötmillió baktérium akkor marad a hetedik dobás után, ha a hét dobás közül legalább öt alkalommal 1-et, 2-t vagy 3-at dobtak (azaz csökkent a baktériumok száma). (2 pont)

Ha pontosan öt alkalommal dobtak 1-et, 2-t vagy 3-at, akkor a másik két alkalommal 4-et vagy 5-öt dobtak (azaz mindkétszer változatlan maradt a baktériumszám). Ennek a valószínűsége: $\binom{7}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 (\approx 0,073)$. (1 pont)

Ha pontosan hat alkalommal dobtak 1-et, 2-t vagy 3-at, akkor a maradék egy alkalommal 4-et vagy 5-öt dobtak (azaz nem történt változás), vagy egy alkalommal 6-ot dobtak (azaz növekedett a baktériumok száma). Ennek a valószínűsége: $\binom{7}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\frac{1}{3}+\binom{7}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\frac{1}{6} (\approx 0,055)$. (2 pont)

Annak a valószínűsége, hogy pontosan hétszer dobtak 1-et, 2-t vagy 3-at: $\left(\frac{1}{2}\right)^7 (\approx 0,008)$. (1 pont)

A kérdezett valószínűség (a három egymást páronként kizáró lehetőség valószínűségének összege, azaz) körülbelül $(0,073+0,055+0,008=)$ **0,136**.

(1 pont)

Összesen: 16 pont

42) Egy pár kesztyű árát először p százalékkal csökkentették, majd a csökkentett ár $p+4,5$ százalékával tovább mérsékelték. A kétszeri árcsökkentés után a kesztyű 18,6%-kal olcsóbb lett, mint az árcsökkenés előtt volt.

a) Határozza meg a két árcsökkentés százalékos értékét! (8 pont)

Egy fiókban 3 pár kesztyű van összekeveredve: az egyik pár fekete, a másik szürke, a harmadik piros. (A három pár kesztyű csak a színében különböző.) A fiókból egyesével elkezdjük kihúzni a kesztyűket úgy, hogy húzás előtt nem nézzük meg a kesztyű színét, és a kihúzott kesztyűket nem tesszük vissza a fiókba. Addig folytatjuk a húzást, amíg lesz két azonos színű kesztyűnk.

b) Határozza meg annak a hat eseménynek a valószínűségét, hogy ehhez 1, 2, 3, 4, 5, illetve 6 kesztyű kihúzására lesz szükség, majd számítsa ki a húzások számának várható értékét! (8 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Szöveges feladatok 18. feladat*

b) Annak a valószínűsége, hogy pontosan egy húzás szükséges: $P(1)=0$ (1 pont)

Legfeljebb 4 húzás szükséges ahhoz, hogy legyen két azonos színű kesztyű a kihúzottak között, (1 pont)

ezért a pontosan 5, illetve pontosan 6 szükséges húzás valószínűsége: $P(5)=P(6)=0$. (1 pont)

A pontosan 2 húzás szükségességének valószínűsége: $P(2)=\frac{1}{5}$ (a másodiknak kihúzott kesztyű színe megegyezik az elsőével). (1 pont)

Pontosan 3 húzás akkor szükséges, ha a második kihúzott kesztyű színe nem egyezik meg az elsőnek kihúzottéval, de a harmadikra húzott kesztyű színe megegyezik az első kettő közül valamelyiknek a színével: $P(3)=\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{2}{5}$.

(1 pont)

Pontosan 4 húzás akkor szükséges, ha az első három szín mind különböző (ekkor a negyediknek kihúzott kesztyű színe már biztosan megegyezik valamelyik korábban kihúzott kesztyű színével): $P(4)=\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot 1=\frac{2}{5}$. (1 pont)

A szükséges húzások számának várható értéke tehát: $(0\cdot 1+)\frac{1}{5}\cdot 2+\frac{2}{5}\cdot 3+\frac{2}{5}\cdot 4(+0\cdot 5+0\cdot 6)=$ (1 pont)

$=\mathbf{3{,}2}$. (1 pont)

Összesen: 16 pont

43) Az iskolai karácsonyi vásárra készülődve Blanka, Csenge és Dóri feladata az volt, hogy különböző figurákat hajtogassanak színes papírból. Összesen 70 figurát hajtogattak. A figurák kétheted részét Dóri készítette, a maradékot pedig fele-fele arányban Blanka és Csenge.

a) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a 70 figura közül véletlenszerűen kiválasztott két figurát ugyanaz a lány készítette!
(6 pont)

A Blanka által készített figurák 40%-a volt karácsonyfa, a Csenge által készített figuráknak 60%-a, a Dóri által készített figuráknak pedig 30%-a.

Az első vásárló a vásáron Blanka édesanyja volt; ő megvett egy véletlenszerűen kiválasztott karácsonyfa-figurát.

b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a figurát éppen Blanka készítette! (3 pont)

A gyerekek másfajta díszeket is készítettek úgy, hogy színes kartonlapra nyomtatott kör alakú képeket négy-négy egyenes vágással vágtak körül. Az egyik ilyen módon kapott érintőnégyszög alakú függődísz oldalainak hossza (valamilyen sorrendben) egy számtani sorozat négy szomszédos tagja. A négyszög egyik oldala 23 cm, a kerülete pedig 80 cm.

c) Mekkora lehet a négyszög másik három oldalának hossza? (7 pont)

Megoldás:

a) Dóri 20, Blanka és Csenge 25-25 figurát készített. (1 pont)

Két figurát $\binom{70}{2}=2415$-féleképpen választhatunk ki (összes eset száma).

(1 pont)

Dóri két figurája $\binom{20}{2}=190$, Blanka és Csenge két figurája rendre $\binom{25}{2}=300$-féleképpen választható ki, (1 pont)

így $\binom{20}{2}+2\cdot\binom{25}{2}=790$-féleképpen választható ki úgy két figura, hogy mindkettőt ugyanaz a lány készítette (kedvező esetek száma). (1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy a két kiválasztott figurát ugyanaz a lány készítette, $\frac{\binom{20}{2}+2\cdot\binom{25}{2}}{\binom{70}{2}}=\mathbf{\frac{158}{483}}\approx\mathbf{0{,}327}$. (2 pont)

b) A Blanka, Csenge és Dóri által készített karácsonyfafigurák száma rendre 10, 15 és 6. (1 pont)

Összesen 31 karácsonyfa-figurát készítettek, ezért $\frac{10}{31} \approx 0,323$ annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott figurát éppen Blanka készítette. (2 pont)

c) *Lásd: Sorozatok 26. feladat*

Összesen: 16 pont

44)

a) Döntse el, hogy igaz-e a következő kijelentés! Válaszát indokolja!
Van olyan G_1, illetve G_2 fagráf, amelyre igaz, hogy a G_2 csúcsainak száma kétszerese a G_1 csúcsai számának, és a G_2 éleinek száma is kétszerese a G_1 élei számának. (A fagráfnak van legalább egy csúcsa.) **(3 pont)**

Az *A, B, C, D, E, F* kereskedőcégek mindegyike mind az öt másik céggel kötött egy-egy üzletet az előző hónapban (bármelyik két cég között pontosan egy üzletkötés jött létre). Az ellenőrző hatóság véletlenszerűen kiválaszt a hat cég előző havi (egymás közötti) üzletkötései közül négyet, és azokat ellenőrzi.

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy az *A* vagy a *B* cég üzletkötései közül is ellenőriznek legalább egyet? **(6 pont)**

Az egyik cég azzal bízott meg egy reklámügynökséget, hogy tervezzen egy nagy méretű, függőlegesen leomló hirdetővásznat a budapesti Lánchíd fő tartóláncának egy részére.

A híd két támpillérének *PV* távolsága kb. 200 méter. A fő tartólánc alakja jó közelítéssel egy olyan (függőleges síkú) parabolának az íve, amelynek a tengelypontja a *PV* felezőpontja (*U*), a tengelye pedig a *PV* felezőmerőlegese. A lánc tartópillérnél becsült legnagyobb magassága $PQ = 16$ méter, a vászon tervezett szélessége $PS = 50$ méter. A tervek szerint a *QR* íven felfüggesztett hirdetővászon az ábrán sötétített *PQRS* területet fedi majd be (*RS* merőleges *PS*-re).

c) Hány m² területű vászon beszerzésére lesz szükség, ha a rögzítések miatt 8% veszteséggel számol a tervező? **(7 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Gráfelmélet 11. feladat*

b) Összesen $\binom{6}{2} = 15$ üzletkötés történt az előző hónapban, (1 pont)

ezek közül 4-et $\binom{15}{4} = 1365$-féleképpen lehet kiválasztani ellenőrzésre (összes eset száma). (1 pont)

Nem kedvezők azok az esetek, amelyekben mind a 4 ellenőrzésre kiválasztott üzletkötés a *C, D, E* és *F* üzletkötései közül kerül ki. (1 pont)

C, D, E, F egymás között 6 üzletet kötött, ezek közül 4-et $\binom{6}{4} = 15$-féleképpen lehet kiválasztani. (1 pont)

A kedvező esetek száma: $\binom{15}{4}-\binom{6}{4}=1350$, (1 pont)

így a kérdéses valószínűség $\frac{\mathbf{1350}}{\mathbf{1365}}=\frac{\mathbf{90}}{\mathbf{91}}(\approx \mathbf{0,989})$. (1 pont)

d) *Lásd: Síkgeometria 31. feladat*

Összesen: 16 pont

45)

a) Határozza meg az alábbi két állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszait indokolja!
I. Ha egy trapéznak 2-2 szöge egyenlő, akkor a trapéz húrtrapéz.
II. Ha egy háromszögben $a=b$, akkor $3\alpha=\sin 3\beta$.
(A háromszög oldalai *a*, *b* és *c*, a velük szemközti szögek rendre α, β és γ.) **(6 pont)**

b) Fogalmazza meg a II. állítás megfordítását, és a megfordított állításról is döntse el, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!(4 pont)

Egy matematika-vizsgafeladatban három állítás logikai értékét kell meghatározni (igaz vagy hamis). Három helyes válasz esetén 2, két helyes válasz esetén 1, kettőnél kevesebb helyes válasz esetén 0 pontot kap a vizsgázó. Béla tanult egy keveset, de bizonytalan a tudása: mindegyik kérdésnél 0,6 valószínűséggel találja el a helyes választ.

c) Számítsa ki annak a négy eseménynek a valószínűségét, hogy Béla sikeres tippjeinek száma 3, 2, 1, illetve 0, és határozza meg Béla pontszámának várható értékét! **(6 pont)**

<u>Megoldás:</u>

a) *Lásd: Síkgeometria 33. feladat*

b) *Lásd: Síkgeometria 33. feladat*

c) 0,4 annak a valószínűsége, hogy egy adott kérdésre hibásan válaszol Béla. A nulla helyes tipp valószínűsége $p_0=0,4^3=0,064$. (1 pont)

Az egy helyes tipp valószínűsége $p_1=\binom{3}{1}\cdot 0,6\cdot 0,4^2=0,288$. (1 pont)

A két helyes tipp valószínűsége $p_2=\binom{3}{2}\cdot 0,6^2\cdot 0,4=0,432$. (1 pont)

A három helyes tipp valószínűsége $p_3=0,6^3=0,216$. (1 pont)

Béla pontszámának várható értéke $p_3\cdot 2+p_2\cdot 1+p_1\cdot 0+p_0\cdot 0=$ (1 pont)

$=\mathbf{0,864}$. (1 pont)

Összesen: 16 pont

46) A római katonák az úgynevezett taxillus-szal játszottak „kockajátékot". (A taxillus a kecske vagy a juh térdkalácsából faragott csontocska; ld. a képen.)

Dobás után egy taxillus négy különböző oldalára eshetett. Jelölje ezt a négy különböző helyzetet *A*, *B*, *C* és *D*. Az egyes dobáskimenetelek nem voltak egyformán valószínűek: az *A*, illetve a *B* helyzet egyaránt $\frac{4}{10}$, a *C*, illetve a *D* helyzet pedig egyaránt $\frac{1}{10}$ valószínűséggel következett be.

A rómaiak általában négy taxillust dobtak fel egyszerre. A Venus-dobás volt az egyik legértékesebb, ekkor a négy csontocska mindegyike más-más oldalára esett. (Rényi Alfréd: Levelek a valószínűségről.)

a) Mennyi a Venus-dobás valószínűsége? (5 pont)

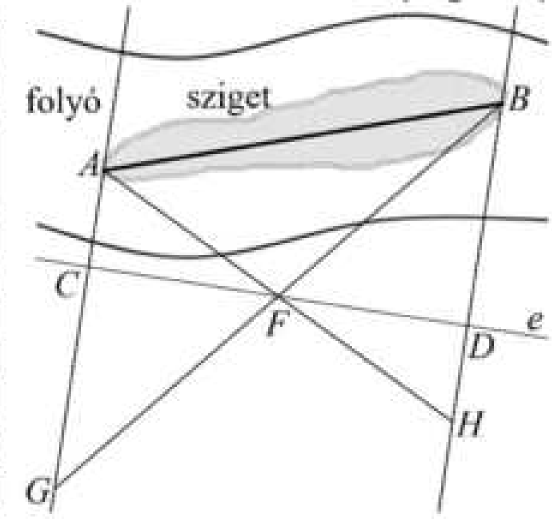
b) Az alábbi két esemény közül melyiknek nagyobb a valószínűsége?

I. Négy feldobott taxillus között lesz olyan, amelyik *C* helyzetben érkezik le.

II. Négy feldobott taxillus között pontosan egy érkezik le az *A* helyzetben. (5 pont)

Thalész, a hét görög bölcs egyike, egy nevezetes, neki tulajdonított mérés során egy folyóban lévő sziget *AB* hosszát a folyóparton maradva határozta meg.

Először felvett egy *e* egyenest a parton. Ezen az *e* egyenesen megkereste azt a *C*, illetve *D* pontot, amelyekben a *CA*, illetve a *DB* irány merőleges az *e* egyenesre. Ezután a *CD* szakasz *F* felezőpontját is megjelölte egy jelzőkaróval. Ezt követően az *AC* egyenesen haladva megjelölte azt a *G* pontot, amelyre *B*, *F* és *G* egy egyenesre illeszkedik; és hasonlóan az *AF* és *BD* egyenesek *H* metszéspontját is megjelölte. Thalész azt állította, hogy a sziget hossza a *GH* távolsággal egyezik meg.



c) Igazolja Thalész állításának helyességét! (6 pont)

Megoldás:

a) A négy csontocska összesen $4!(=24)$ különböző módon érkezhet le úgy, hogy az eredmény Venus-dobás legyen (és ezen leérkezések egyformán valószínűek). (2 pont)

Mindegyik leérkezés valószínűsége ugyanannyi:

$\frac{4}{10}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}(=0{,}0016)$. (2 pont)

A kérdezett valószínűség tehát $\mathbf{4!\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\left(=\frac{24}{625}\right)=0{,}0384}$. (1 pont)

b) Annak a valószínűsége, hogy egyik taxillus sem a *C* helyzetben érkezik le: $0{,}9^4\,(=0{,}6561)$, (1 pont)

tehát az I. esemény valószínűsége $(1-0{,}6561=)0{,}3439$. (1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy egy előre megjelölt taxillus az *A* helyzetben érkezik le, a többi pedig nem: $0{,}4\cdot0{,}6^3\,(=0{,}0864)$. (1 pont)

A négy taxillus bármelyike lehet az előre megjelölt, ezért a II. esemény valószínűsége $\left(4\cdot0{,}4\cdot0{,}6^3=\right)0{,}3456$. (1 pont)

Fentiek alapján a II. esemény valószínűbb, mint az I. (1 pont)

c) *Lásd: Bizonyítások 23. feladat*

Összesen: 16 pont

47) Egy bűvész két egyforma „dobótetraédert” használ az egyik mutatványához. A dobótetraéder alakja olyan szabályos háromoldalú gúla, amelynek alapéle 6 cm hosszú, az oldalélei pedig 30° -os szöget zárnak be az alaplap síkjával.

a) Határozza meg a tetraéder térfogatát! (6 pont)

A tetraéderrel 1-est, 2-est, 3-ast vagy 4-est lehet dobni (a dobás eredményének az alsó lapon lévő számot tekintjük). Az 1-es, a 2-es, illetve a 3-as dobásának valószínűsége egyenlő. A 4-es dobás valószínűsége ötször akkora, mint az 1-es dobásé.

b) Ha a bűvész a két dobótetraédert egyszerre dobja fel, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 6 lesz?

(5 pont)

Megoldás:

b) *Lásd: Térgeometria 31. feladat*

c) Ha az 1-es, a 2-es és a 3-as dobás valószínűsége p, akkor a 4-es dobás valószínűsége $5p$. (1 pont)

$p+p+p+5p=8p=1$, ezért $p=\frac{1}{8}$ (1 pont)

A dobott számok összege akkor lehet 6, ha az egyik tetraéderrel 2-t, a másikkal 4-et, vagy ha mind a kettővel 3-at dob a bűvész.

Annak a valószínűsége, hogy az egyik tetraéderrel 2-t, a másikkal pedig 4-et dob a bűvész:

$2\cdot p\cdot 5p=10p^2=\frac{10}{64}$ (1 pont)

Annak a valószínűsége pedig, hogy mindkét tetraéderrel 3-at dob:

$p\cdot p=p^2=\frac{1}{64}$ (1 pont)

Tehát a kérdezett valószínűségek összege (mivel független eseményekről van szó) $\mathbf{\frac{11}{64}(\approx 0{,}172)}$ (1 pont)

Összesen: 11 pont

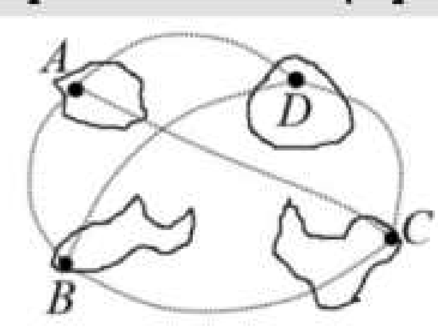
48) Öt különböző számjegyet leírunk egy papírlapra. Két számjegyet pontosan akkor kötünk össze egy vonallal (éllel), ha különbségük páros szám (de egyik számjegyet se kötjük össze önmagával). Így egy ötpontú gráfot kapunk.

a) Határozza meg az alábbi két állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszát indokolja!

I. Lehetséges, hogy fagráfot kapunk.

II. Lehetséges, hogy nem összefüggő gráfot kapunk. (4 pont)

Az Óceán Légitársaságnak a megalakulása óta alapelve, hogy a szigetvilágban működő hálózatnak bármely két célállomása között működtet repülőjáratot. (Az *ábra* azt a több évvel ezelőtti időszakot szemlélteti, amikor még csak négy célállomás és hat repülőjárat volt.)



A hálózatot folyamatosan bővítik: az utóbbi két év alatt a célállomások száma másfélszeresére nőtt, ugyanezen idő alatt a repülőjáratok száma pedig 60-nal lett több.

b) Hány célállomásra közlekednek jelenleg? (7 pont)

A légitársaság vezetőségi értekezletén megállapították, hogy az 1-es számú járatukon legfeljebb 168 utasnak van hely, de minden alkalommal sokkal többen szeretnének jegyet váltani. Több év tapasztalatai szerint 0,032 annak a valószínűsége, hogy erre a járatra valaki megveszi a jegyet, de aztán valamilyen ok miatt mégsem jelenik meg a járat indulásánál. Emiatt a vezetőség úgy dönt, hogy erre a 168 fős járatra ezentúl 170 jegyet adnak el. Az érvényes szabályozás szerint a több jegy eladása miatt a járatról esetleg lemaradó utasoknak a légitársaság fejenként 600 euró kártérítést köteles fizetni.

c) Ha a vezetőség megállapításai helyesek, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy az 1-es számú járat egy indulásánál legfeljebb 168 utas jelenik meg, és mennyi a társaság által fizetendő kártérítés várható értéke a járat egy útját tekintve? (5 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Gráfelmélet 12. feladat*

b) *Lásd: Szöveges feladatok 27. feladat*

c) A modell szerint 0,968 annak a valószínűsége, hogy valaki megjelenik az indulásnál. (1 pont)

Annak valószínűsége, hogy 169 utas jelenik meg:

$P(169)=\binom{170}{169}\cdot 0,968^{169}\cdot 0,032\approx 0,022.$ (1 pont)

Annak valószínűsége, hogy 170 utas jelenik meg:

$P(170)=0,968^{170}\approx 0,004.$ (1 pont)

Annak valószínűsége tehát, hogy legfeljebb 168 utas jelenik meg:

$1-P(169)-P(170)\approx \mathbf{0,974}$ (1 pont)

A légitársaság által fizetendő kártérítés várható értéke:

$P(169)\cdot 600+P(170)\cdot 1200\approx$ **18 euró** (1 pont)

Összesen: 16 pont

49) A p, q, r pozitív számok összege 180. Továbbá tudjuk, hogy $p:q=7:8$ és $r:p=5:3$.

a) Határozza meg ezeket a számokat! (6 pont)

A *H* halmaz az első 90 pozitív egész szám halmaza. *H*-ból véletlenszerűen kiválasztunk két különböző számot.

b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a két kiválasztott szám egy derékszögű háromszög (fokban mért) valamelyik két szöge! (7 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Számelmélet 12. feladat*

b) A lehetséges (egyenlően valószínű) kiválasztások száma $\binom{90}{2}(=4005)$ (összes eset száma). (1 pont)

Kedvezők azok az esetek, amelyekben az egyik kiválasztott száma a 90, a másik tetszőleges, illetve amelyekben a két kiválasztott szám összege 90.

(1 pont)

Az összes eset között 89 olyan eset van, amelybe az egyik kiválasztott szám a 90, (1 pont)

és 44 olyan eset, amelyben a két kiválasztott szám összege 90 $(1+89, 2+88, \ldots, 44+46)$. (2 pont)

A kedvező esetek száma tehát $(89+44=)133$. (1 pont)

Tehát a keresett valószínűség: $\frac{133}{\binom{90}{2}} = \mathbf{\frac{133}{4005} \approx 0,0332.}$ (1 pont)

Alternatív megoldás:

Akkor lesz a kiválasztott két szám egy derékszögű háromszög két szöge, ha vagy elsőre a 90-et választjuk, (és a másodikra bármelyik másikat), vagy másodikra választjuk a 90-et (és elsőre bármelyik másikat), vagy az elsőnek választott számot a második 90-re egészíti ki. (1 pont)

Így $\frac{1}{90}$ a valószínűsége, hogy elsőre a 90-et választjuk. (1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy másodikra választjuk a 90-et: $\frac{89}{90} \cdot \frac{1}{89} = \frac{1}{90}$.
(1 pont)

(A 45-öt nem lehet egy másik számmal 90-re kiegészíteni.) $\frac{88}{90}$ annak a valószínűsége, hogy elsőre nem a 90-et és nem a 45-öt választjuk, (1 pont)

és ekkor $\frac{1}{89}$ annak a valószínűsége, hogy a másodiknak választott szám az elsőként választott számot 90-re egészíti ki. (1 pont)

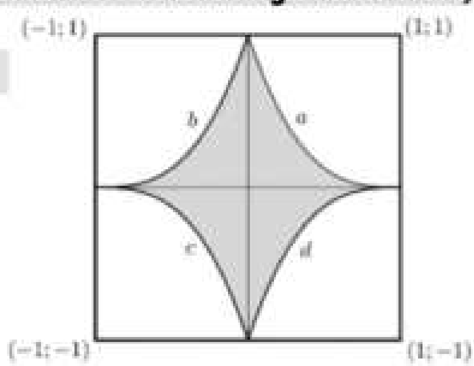
Ennek az esetnek $\frac{88}{90} \cdot \frac{1}{89}$ a valószínűsége. (1 pont)

A keresett valószínűség tehát $\frac{1}{90} + \frac{1}{90} + \frac{88}{90} \cdot \frac{1}{89} \approx \mathbf{0,0332}$ (1 pont)

Összesen: 13 pont

50) Egy kétszemélyes társasjátékot olyan négyzet alakú táblán játszanak, amelyet fehér és szürke mezőkre osztottak fel az ábra szerint.

Ha a táblát egy olyan koordináta-rendszerbe helyezzük, amelyben a négyzet csúcsainak koordinátái $(1;1)$, $(-1;1)$, $(-1;-1)$, illetve $(1;-1)$, akkor ebben a koordináta-rendszerben az *a* jelű ív egyenlete: $y=(1-x)^3$, $0 \le x \le 1$. A tábla középpontosan és tengelyesen is szimmetrikus.



a) Írja fel a másik három (az ábrán *b*, *c*, illetve *d* jelű) ív egyenletét is! **(4 pont)**

A társasjáték gyártója a 2 dm oldalú tábla fehér színű részének bevonásához egy speciális anyagot használ. Ebből 1 kg mennyiség 12 m² terület bevonásához elegendő.

b) Számítsa ki, hogy 4000 darab tábla elkészítéséhez hány kg speciális anyag szükséges! **(5 pont)**

A kétszemélyes társasjátékban minden játszma csak valamelyik játékos győzelmével végződhet, döntetlen nincs. Minden játszmában 1 pontot kap a győztes, a vesztes pedig 0 pontot.
Anna és Bori nagyon szereti ezt a társasjátékot, sok játszmát lejátszottak már. Ha egymás ellen játszanak, akkor Anna 0,4 valószínűséggel, Bori pedig 0,6 valószínűséggel nyer meg egy játszmát. Egyik alkalommal megállapodnak, hogy addig játszanak újabb játszmákat, amíg valamelyikük először éri el a 10 pontot (és így megnyeri a játékot).

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy Bori legfeljebb 12 játszma után megnyeri a játékot? (Kezdéskor mindkettőjüknek 0 pontja van.)

(7 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Koordinátageometria 27. feladat*

b) *Lásd: Szöveges feladtaok 28. feladat*

c) Annak valószínűségét kell meghatározni, hogy legfeljebb 12 játszmából Bori eléri a 10 pontot, tehát $10-0$ vagy $10-1$ vagy $10-2$ lesz a játék eredménye. (1 pont)

$P(10-0)=0,6^{10}\ (\approx 0,006)$ (1 pont)

11 játszma után ér véget a játék, ha az első 10 játszmából Bori 9-et nyer, egyet elveszít és a 11. játszmát ismét ő nyeri. (1 pont)

$P(10-1)=\binom{10}{9}\cdot 0,6^{9}\cdot 0,4\cdot 0,6(\approx 0,024)$ (1 pont)

12 játszma után fejeződik be a játék, ha az első 11 játszma közül Bori 9-et nyer, kettőt elveszít. és a 12. játszmát is ő nyeri. (1 pont)

$P(10-2)=\binom{11}{9}\cdot 0,6^{9}\cdot 0,4^{2}\cdot 0,6(\approx 0,053)$ (1 pont)

A keresett valószínűség az előző valószínűségek összege, azaz kerekítve **0,083**. (1 pont)

Alternatív megoldás:

Képzeljük úgy, hogy mindenképp lejátszanak 12 játszmát, még akkor is, ha Bori korábban eléri már a 10 pontot. (2 pont)
Annak valószínűségét kell meghatározni, hogy Bori a 12 játszmából 10, 11 vagy 12 játszmát nyer meg. (1 pont)
Ehhez ki kell számolni és összeadni az $n=12$ és $p=0,6$ paraméterű binomiális eloszlás megfelelő tagjait. (1 pont)

$P(10)=\binom{12}{10}\cdot 0,6^{10}\cdot 0,4^{2}\ (\approx 0,064)$

$P(11)=\binom{12}{11}\cdot 0,6^{11}\cdot 0,4^{1}\ (\approx 0,017)$

$P(12)=\binom{12}{12}\cdot 0,6^{12}\cdot 0,4^{0}\ (\approx 0,002)$ (2 pont)

A keresett valószínűség az előző valószínűségek összege, azaz kerekítve **0,083**. (1 pont)

Összesen: 16 pont

51) **Egy középiskolában a tizedikesek évfolyamdolgozatot írtak matematikából. A dolgozatban maximálisan 100 pontot lehetett elérni. Az évfolyamra járó 80 tanuló közül a dolgozat megírásakor néhányan hiányoztak. A dolgozatokban elért pontszámok átlagát először úgy számították ki, hogy a hiányzó tanulók eredményét 0 pontosként vették figyelembe.**

Rövid időn belül észrevették, hogy ez a számítási mód hibás. A hibát kijavították, így a hiányzók figyelembe vétele nélkül kapott átlag 4,2 ponttal magasabbnak adódott, mint az első (hibás) számítás utáni átlag. Egy héttel később az első megírás alkalmával hiányzó tanulók pótolták a dolgozatot; az ő átlageredményük 64 pont lett (a pótdolgozatban is maximálisan 100 pontot lehetett elérni). A teljes tízedik évfolyam matematika-évfolyamdolgozatainak átlageredménye 67 pontos lett.

a) Hány tanuló hiányzott a dolgozat első megírásakor?

Hány pont volt azoknak a tanulóknak a helyesen számolt átlageredménye, akik az első alkalommal megírták a dolgozatot?

(9 pont)

Az évfolyamdolgozat egyik feladatában öt feleletválasztós kérdésben kellett négy-négy válaszlehetőség közül az egyetlen helyeset kiválasztani. Amikor Domonkos elolvasta a kérdéseket, akkor látta, hogy az első két kérdésre biztosan tudja a helyes választ (ezeket be is jelöli majd), a harmadik és negyedik kérdésnél egy-egy válaszlehetőségről, az ötödik kérdésnél pedig két válaszlehetőségről tudta biztosan, hogy azok rosszak. Ezért úgy döntött. hogy az utolsó három kérdésnél tippelni fog: véletlenszerűen választ azon válaszlehetőségek közül, amelyekről nem tudja biztosan, hogy rosszak.

b) Határozza meg Domonkos helyes válaszai számának várható értékét!

(7 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Szöveges feladatok 29. feladat*

b) Domonkos a harmadik és negyedik kérdésre is $\frac{1}{3}$, az ötödik kérdésre pedig $\frac{1}{2}$ valószínűséggel ad helyes választ. (1 pont)

Pontosan 2 helyes válasza akkor lesz, ha mindhárom tippelt kérdést elrontja.

Ennek valószínűsége $P(2)=\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\left(=\frac{2}{9}\right)$. (1 pont)

Pontosan 3 helyes válasza akkor lesz, ha a három tippelt kérdés közül egyet talál el: ez lehet a teszt harmadik, negyedik vagy ötödik kérdése (és ezek egymást kizáró eredmények). Ennek valószínűsége

$P(3)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(=\frac{4}{9}\right)$. (1 pont)

Pontosan 4 helyes válasza akkor lesz, ha a három tippelt kérdés közül egyet ront el: ez lehet a teszt harmadik, negyedik vagy ötödik kérdése (és ezek egymást kizáró eredmények). Ennek valószínűsége

$P(4)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(=\frac{5}{18}\right)$. (1 pont)

Öt helyes válasza akkor lesz, ha mindhárom tippelt kérdést eltalálja.

$P(5)=\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\left(=\frac{1}{18}\right)$. (1 pont)

Domonkos helyes válaszai számának várható értéke:

$\frac{2}{9}\cdot 2+\frac{4}{9}\cdot 3+\frac{5}{18}\cdot 4+\frac{1}{18}\cdot 5=\mathbf{\frac{57}{18}}\left(=\mathbf{\frac{19}{6}}\right)$ (2 pont)

Összesen: 16 pont

52) Adott a síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben az $x^2+y^2+6x+4y-3=0$ egyenletű kör. Ebbe a körbe szabályos háromszöget írunk, amelynek egyik csúcsa $A(1;-2)$.

a) Számítsa ki a szabályos háromszög másik két csúcsának koordinátáit! Pontos értékekkel számoljon! (11 pont)

b) Véletlenszerűen kiválasztjuk az adott kör egy belső pontját. Mekkora a valószínűsége, hogy a kiválasztott pont a tekintett szabályos háromszögnek is belső pontja? Válaszát két tizedes jegyre kerekítve adja meg! (5 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Koordinátageometria 11. feladat*

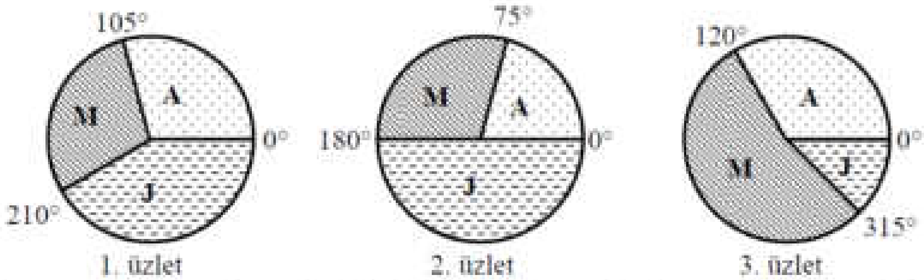
b) A kérdéses valószínűség a beírt szabályos háromszög és a kör területének hányadosa (2 pont)

A kör területe: $T_k=r^2\pi$ (1 pont)

A szabályos háromszög területe: $T_h=3\cdot\frac{r^2\sin 120^\circ}{2}=\frac{3r^2\cdot\sqrt{3}}{4}$ (1 pont)

A keresett valószínűség: $\boldsymbol{P=\frac{T_h}{T_k}=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\approx 0,41}$ (1 pont)

53) Egy könyvkiadó minden negyedévben összesíti, hogy három üzletében melyik szépirodalmi kiadványból fogyott a legtöbb. A legutóbbi összesítéskor mindhárom üzletben ugyanaz a három szerző volt a legnépszerűbb: Arany János, Márai Sándor és József Attila. Az alábbi kördiagramok szemléltetik, hogy az üzletekben milyen arányban adták el ezeknek a szerzőknek a műveit. A kördiagramok az első üzletből 408, a másodikból 432, a harmadikból 216 eladott könyv eloszlását szemléltetik.



a) A kördiagramok adatai alapján töltse ki az alábbi táblázatot! Melyik szerző műveiből adták el a vizsgált időszakban a legtöbb könyvet? (5 pont)

	1. üzlet	2. üzlet	3. üzlet	Összesített forgalom
Arany János				
Márai Sándor				
József Attila				
Összesen	**408**	**432**	**216**	

b) Készítsen olyan oszlopdiagramot a táblázat alapján, amely a vizsgált időszakban a szerzők szerinti összesített forgalmat szemlélteti! **(3 pont)**

A könyvkiadó a három üzletében minden eladott könyvhöz ad egy sorsjegyet. Ezek a sorsjegyek egy közös sorsoláson vesznek részt negyedévenként. A vizsgált időszakban azok a sorsjegyek vesznek részt a sorsoláson, amelyeket a fenti három szerző műveinek vásárlói kaptak. Két darab 50 ezer forintos könyvutalványt sorsolnak ki köztük.

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a vizsgált időszak sorsolásán mind a két nyertes sorsjegyet Márai Sándor egy-egy könyvéhez adták, és mind a két könyvet a 2. üzletben vásárolták? Válaszát három tizedesjegy pontossággal adja meg! **(5 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Statisztika 2. feladat*

b) *Lásd: Statisztika 2. feladat*

c) A vizsgált időszakban a sorsoláson résztvevő sorsjegyek száma: $408+432+216=1056$ (1 pont)

Ezek közül 2 nyerő sorsjegyet összesen $\binom{1056}{2}$-féleképpen lehet kisorsolni (1 pont)

A 2. üzletben 126 Márai-könyvhöz adtak sorsjegyet, ezek közül $\binom{126}{2}$-féleképpen lehet 2 nyerőt kisorolni (1 pont)

A keresett valószínűség: $\dfrac{\binom{126}{2}}{\binom{1056}{2}}$, (1 pont)

ennek értéke $p=\dfrac{7875}{557040}\approx \mathbf{0{,}014}$ (1 pont)

Összesen: 13 pont

54) András edzőtáborban készül egy úszóversenyre, 20 napon át. Azt tervezte, naponta 10000 métert úszik. De az első napon a tervezettnél 10%-kal többet, a második napon pedig az előző napinál 10%-kal kevesebbet teljesített. A 3. napon ismét 10%-kal növelte előző napi adagját, a 4. napon 10%-kal kevesebbet edzett, mint az előző napon és így folytatta, páratlan sorszámú napon 10%-kal többet, pároson 10%-kal kevesebbet teljesített, mint a megelőző napon.

a) Hány métert úszott le András a 6. napon? **(4 pont)**

b) Hány métert úszott le összesen a 20 nap alatt? **(6 pont)**

c) Az edzőtáborozás 20 napjából véletlenszerűen kiválasztunk két szomszédos napot. Mekkora a valószínűsége, hogy András e két napon együttesen legalább 20000 métert teljesített? **(6 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Sorozatok 19. feladat*

b) *Lásd: Sorozatok 19. feladat*

c) Az edzések 20 napja közül két szomszédos nap 19-féleképpen választható ki (1 pont)

Ha két szomszédos nap során összességében nem teljesül a tervezett 20000 méter, később se fog, mert az összteljesítmény csökken (1 pont)

napok száma (n)	naponta leúszott táv méterben (a_n)	kétnapi össztáv $(b_n = a_n + a_{n+1})$
1.	11000	20900
2.	9900	20790
3.	10890	20691
4.	9801	20582
5.	10781	20484
6.	9703	20376
7.	10673	20279
8.	9606	20172
9.	10566	20076
10.	9510	19971
11.	10461	

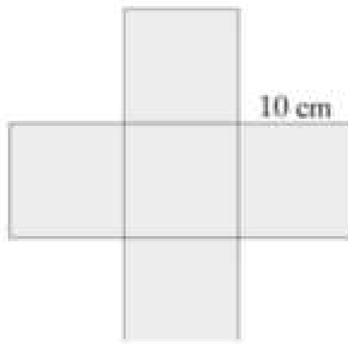
a táblázat (2 pont)

kedvező esetek száma 9 (1 pont)

A keresett valószínűség $P = \frac{9}{19} \approx \mathbf{0,474}$ (1 pont)

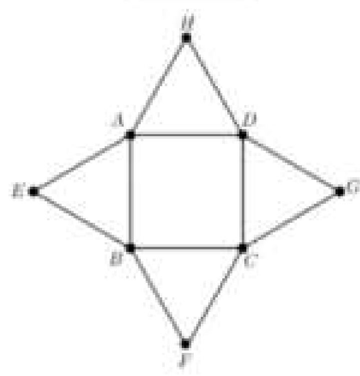
Összesen: 16 pont

55) A mellékelt ábrán egy kereszt alakú lemez látható, amely 5 db 10 cm oldalú négyzetből áll. A lemezből egy 10 cm alapélű, szabályos négyoldalú gúla hálóját szeretnénk kivágni úgy, hogy a középső négyzet legyen a gúla alaplapja.



a) Igazolja, hogy a lehetséges hálók kivágása során keletkező hulladék legalább $200\ \text{cm}^2$, de kevesebb $300\ \text{cm}^2$-nél! (6 pont)

Tekintsük az ábrán látható nyolcpontú gráfot.



b) A gráfban véletlenszerűen kiválasztunk két csúcsot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két csúcsot él köti össze a gráfban? (4 pont)

c) A gráf 9 élét kékre, 3 élét pedig zöldre színezzük. Igazolja, hogy bármelyik ilyen színezéssel lesz a gráfban egyszínű (gráfelméleti) kör!

Megoldás:

a) *Lásd: Bizonyítások 30. feladat*

b) Két csúcsot $\binom{8}{2}(=28)$-féleképpen választhatunk ki ez az összes eset száma. (1 pont)

A gráfnak 12 éle van, így a két csúcs 12 esetben lesz egy él két végpontja (kedvező esetek száma). (2 pont)

A keresett valószínűség $\frac{12}{\binom{8}{2}} = \mathbf{\frac{3}{7}}$ $(\approx 0,429)$. (1 pont)

Alternatív megoldás:

Ha az első kiválasztott csúcs „külső" pont (E, F, G vagy H), akkor a megfelelő második csúcs kiválasztásának $\frac{2}{7}$ a valószínűsége (a maradék 7 csúcsból 2 szomszédos). (1 pont)

Ha az első kiválasztott csúcs „belső" pont (A, B, C vagy D), akkor a megfelelő második csúcs kiválasztásának $\frac{4}{7}$ a valószínűsége (a maradék 7 csúcsból 4 szomszédos). (1 pont)

A külső és a belső csúcs kiválasztásának a valószínűsége egyaránt $\frac{1}{2}$, (1 pont)

így a keresett valószínűség $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}=\mathbf{\frac{3}{7}}$. (1 pont)

c) *Lásd: Bizonyítások 30. feladat*

Összesen: 13 pont

56)

a) Hány olyan 90-nél nem nagyobb pozitív egész szám van, amely a 2, a 3 és az 5 közül pontosan az egyikkel osztható? (6 pont)

Az ötöslottó-játékban az első 90 pozitív egész számból kell öt különbözőt megjelölni. A sorsoláson öt (különböző) nyerőszámot húznak ki. (Sem a megjelölés, sem a kihúzás sorrendje nem számít.)

Kati a 7, 9, 14, 64, 68 számokat jelölte meg. A sorsoláson az első három kihúzott nyerőszám a 7, a 9 és a 14 volt. Kati úgy gondolja, hogy most nagy esélye van legalább négy találatot elérni.

b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a hátralévő két nyerőszám közül Kati legalább az egyiket eltalálja! (6 pont)

Az egyik játékhéten összesen 3 222 831 lottószelvényt küldtek játékba a játékosok. Az alábbi táblázat mutatja a nyertes szelvények számát és nyereményét (2-nél kevesebb találattal nem lehet nyerni).

Találatok száma	Nyertes szelvények száma	Nyeremény (Ft/nyertes szelvény)
5	0	0
4	17	3 113 255
3	1617	34 915
2	62 757	1970

c) Számítsa ki, hogy mennyi volt a játékosok egy lottószelvényre jutó átlagos vesztesége ezen a héten, ha a játékba küldött szelvények egységára 250 Ft! (4 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Számelmélet 13. feladat*

b) A hátralevő két nyerőszámot 87 szám közül sorsolják ki, erre a sorrendet nem figyelembe véve összesen $\binom{87}{2}(=3741)$ lehetőség van (összes eset száma).

(1 pont)

Nézzük a komplementer eseményt: ekkor az utolsó két kihúzott szám között nincs sem a 64, sem a 68. (2 pont)

Erre összesen $\binom{85}{2}(=3570)$ lehetőség van. (1 pont)

A kedvező esetek száma tehát $(3741-3570=)171$. (1 pont)

A keresett valószínűség $\frac{171}{3741} \approx \mathbf{0{,}046}$. (1 pont)

<u>*Alternatív megoldás*</u>:

A hátralevő két nyerőszámot 87 szám közül sorsolják ki. Annak a valószínűsége, hogy a negyediknek húzott szám a 64 vagy a 68, de az ötödik ezek egyike sem: $\frac{2}{87}\cdot\frac{2}{86}(\approx 0{,}0227)$.

Ugyanennyi, $\frac{2}{87}\cdot\frac{2}{86}(\approx 0{,}0227)$ a valószínűsége, hogy a negyedik kihúzott szám nem a 64 és nem a 68, de ötödik ezek közül kerül ki. (2 pont)

Annak valószínűsége, hogy a 64-et és a 68-at is kihúzzák: $\frac{2}{87}\cdot\frac{1}{86}(\approx 0{,}0003)$ (2 pont)

A keresett valószínűség $2\cdot\frac{2\cdot 85}{87\cdot 86}+\frac{2}{87\cdot 86}=$ (1 pont)

$=\frac{342}{7482}\approx \mathbf{0{,}046}$ (1 pont)

c) *Lásd: Szöveges feladatok 34. feladat* (1 pont)

Összesen: 16 pont

57) Egy étteremben (hatósági engedély birtokában) az érvényes általános forgalmi adótól (áfa) kismértékben eltérő adókulcsok alkalmazásának hatását vizsgálták az ételek és italok fogyasztására nézve. Az ételek esetében 4%, az italok esetében 30% áfát adtak hozzá a nettó árhoz, és az így kapott bruttó árat kellett a vendégnek kifizetnie.

A kísérlet első napján az új számítógépes program hibája miatt a számlán éppen fordítva adták a nettó árakhoz az áfát: az ételek nettó árához 30%-ot, az italok nettó árához pedig 4%-ot számoltak hozzá, és ez a számlán is így, hibásan jelent meg.

Egy család ebben a vendéglőben ebédelt, és a hibás program miatt 8710 Ft-os számlát kapott. A hibát észrevették, így végül a helyes összeget, 7670 Ft-ot kellett kifizetniük.

a) Hány forint volt az elfogyasztott ételek, és hány forint volt az elfogyasztott italok helyes bruttó ára? (7 pont)

Egy másik étteremben 12 és 14 óra között 3900 Ft befizetéséért annyit eszik és iszik a vendég, amennyit szeretne.

A befizetendő összeget egy előzetes felmérés alapján állapították meg. A felmérés során minden vendég esetén összeadták az elfogyasztott étel és ital árát az adott fogyasztáshoz tartozó összes egyéb költséggel. Az összesített költségek alapján osztályokba sorolták a vendégeket aszerint, hogy az étteremnek hány forintjába kerültek.

Az alábbi táblázat mutatja a felmérés eredményét. A táblázat első sorában az osztályközepek láthatóak.

fejenként ennyi Ft-ba került az étteremnek	1000	1900	2800	3600	4400	5200
a vendégek ennyi %-a	10	20	25	30	10	5

b) A felmérés eredményét felhasználva számítsa ki, hogy ennek az étteremnek 1000 vendég esetén mekkora a várható haszna! (3 pont)

c) A fenti táblázat értékeivel számolva mennyi a valószínűsége, hogy két (ebédre betérő) vendég együttes fogyasztása veszteséget jelent az étteremnek?
(A táblázatba foglalt információkat tekinthetjük úgy, hogy egy véletlenszerűen betérő vendég esetén pl. 0,25 annak a valószínűsége, hogy a vendég 2800 Ft-ba kerül az étteremnek.) (6 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Szöveges feladatok 35. feladat*

b) *Lásd: Szöveges feladatok 35. feladat*

c) Pontosan akkor lesz vesztesége az étteremnek ezen a két vendégen, ha az étterem összköltsége több mint 7800 Ft (1 pont)

Ez a következő estekben fordul elő (a sorrendre való tekintet nélkül):
$5200+5200$; $5200+4400$; $5200+3600$;
$5200+2800$; $4400+4400$; $4400+3600$; (2 pont)

A felsorolt esetek valószínűsége (a sorrendet is tekintetbe véve) rendre
$0{,}05\cdot 0{,}05(=0{,}0025)$; $2\cdot 0{,}05\cdot 0{,}1(=0{,}01)$;
$2\cdot 0{,}05\cdot 0{,}3(=0{,}03)$; $2\cdot 0{,}05\cdot 0{,}25(=0{,}025)$;
$0{,}1\cdot 0{,}1(=0{,}01)$; $2\cdot 0{,}1\cdot 0{,}3(=0{,}06)$. (2 pont)

A keresett valószínűség az előző hat valószínűség összege, azaz **0,1375**. (1 pont)

Összesen: 16 pont

58) Van néhány dobozunk és valahány érménk. Ha minden dobozba egy érmét teszünk, akkor m darab érme kimarad. Ha minden dobozba pontosan m db érmét akarunk tenni, akkor m dobozba nem jut érme $(m \neq 1)$.

a) Hány érménk lehet, ha a dobozok száma 6? (6 pont)

Egy dobozban több ezer érme van, amelyek 3%-a hibás. Az érmék közül véletlenszerűen kiválasztunk 80-at. (Az érmék nagy száma és az alacsony hibaszázalék miatt a kiválasztás visszatevéses mintavétellel is modellezhető.)

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 2 hibás érme lesz a kiválasztott érmék között? (5 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Szöveges feladatok 36. feladat*

b) Egy véletlenszerűen választott érme 0,03 valószínűséggel hibás, 0,97 valószínűséggel hibátlan. (1 pont)

(A valószínűségeket az $n=80$, $p=0{,}03$ paraméterű binomiális eloszlás segítségével számítjuk ki.)

$P(0\text{ hibás})=0{,}97^{80}\approx 0{,}087$ (1 pont)

$P(1 \text{ hibás}) = \binom{80}{1} \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}97^{79} \approx 0{,}216$ (1 pont)

$P(2 \text{ hibás}) = \binom{80}{2} \cdot 0{,}03^2 \cdot 0{,}97^{78} \approx 0{,}264$ (1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 2 hibás van $\approx 0{,}087 + 0{,}216 + 0{,}264 = \mathbf{0{,}567}$. (1 pont)

Összesen: 11 pont

59) Legyen az alaphalmaz a háromjegyű pozitív egész számok halmaza. Az *A* halamaz elemei azok a háromjegyű számok, amelyekben van 1-es, a *B* halmaz elemei azok, amelyekben van 2-es, a *C* halmaz elemei pedig azok, amelyekben van 3-as számjegy.

a) Hány eleme van az $A \setminus (B \cap C)$ halmaznak? (5 pont)

Egy szerepjátékhoz használt dobókocka három lapján 3-as, két lapján 2-es, egy lapján 1-es szám van. A feldobott kocka mindegyik lapjára egyforma valószínűséggel esik.

b) Két ilyen dobókockával egyszerre dobva mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobott számok összeg 4 lesz? (5 pont)

Andi és Béla a következő játékot játsszák ezzel a dobókockával. Valamelyikük dob egyet a kockával. Ha a dobás eredménye 3, akkor Andi fizet Bélának *n* forintot $(n > 80)$; ha a dobás eredménye 1, akkor Béla fizet $(n - 80)$ forintot Andinak; ha pedig a dobás eredménye 2, akkor is Béla fizet Andinak $2(n - 80)$ forintot.

c) Mennyit fizet Béla Andinak az 1-es dobása esetén, ha ez a játék igazságos, azaz mindkét játékos nyereményének várható értéke 0? (6 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Halmazok 13. feladat*

b) Az 1-es és 3-as dobás kétféleképpen is előfordulhat (az első és a második dobókockán is lehet 1-es), ennek valószínűsége így $2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6}$. (2 pont)

Két 2-es dobásának valószínűsége $\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6}$. (1 pont)

Így $2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} =$ (1 pont)

$= \mathbf{\frac{10}{36}} \left(= \frac{5}{18} \right)$ annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 4 lesz.

(1 pont)

Alternatív megoldás:

Az összes eset száma $6 \cdot 6 = 36$. (1 pont)

Az első kockán 1-es és a másodikon 3-as $1 \cdot 3 = 3$-féleképpen fordulhat elő, ugyanennyi lehetőség van arra, hogy az első kockán 3-as és a másodikon 1-es legyen. (2 pont)

Két 2-es dobás $2 \cdot 2 = 4$-féleképpen fordulhat elő. (1 pont)

A keresett valószínűség $\frac{2\cdot3+4}{36}=\mathbf{\frac{10}{36}}\left(=\frac{5}{18}\right)$. (1 pont)

c) *Lásd: Szöveges feladatok 37. feladat*

Összesen: 16 pont

60) Egy sorsjegyből jelenleg havonta átlagosan 5000 darabot értékesítenek. Egy darab sorsjegy ára 500 Ft, de a forgalmazó cég ezt csökkenteni szeretné. A sorsjegy ára 10 Ft-os lépésekben csökkenthető. Azt feltételezik, hogy ha az ár n-szer 10 Ft-tal alacsonyabb lesz, akkor havonta $10n^2$ -tel több sorsjegyet tudnak eladni $\left(n\in\mathbb{N}^+\right)$. Tekintsük ezt a feltételezést helytállónak.

a) Határozza meg a sorsjegyek eladásából származó havi bevételt, ha a sorsjegy árát 300 Ft-ra csökkentik! (3 pont)

b) Határozza meg azt az n értéket, amelyre a sorsjegyek eladásából származó havi bevétel maximális lenne! (9 pont)

Az összes sorsjegy 5%-a nyerő. Kétféle nyeremény van: 2500 Ft-os és 50000 Ft-os. A 2500 Ft-os nyerő sorsjegyből pontosan 24-szer annyi van, mint az 50000 Ft-osból.

c) Töltse ki az alábbi táblázat üres mezőit, majd számítsa ki egy darab sorsjegy nyereményének várható értékét! (4 pont)

1 db sorsjegy nyereménye (Ft)	0	2500	50000
nyeremény valószínűsége	0,95		

Megoldás:

a) *Lásd: Szöveges feladatok 39. feladat*

b) *Lásd: Függvények – Analízis 49. feladat*

c) Az 50000 Ft nyeremény valószínűsége p, ekkor $p+24p=0{,}05$, (1 pont)

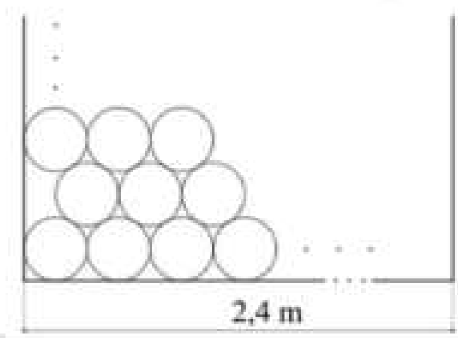
ahonnan $p=0{,}002$ és $24p=0{,}048$. (1 pont)

A nyeremény várható értéke:

$(0{,}95\cdot0+)0{,}048\cdot2500+0{,}002\cdot50000=220\,\text{Ft}.$ (2 pont)

Összesen: 16 pont

61) Egy teherautó raktere 2,4 méter széles, 2 méter magas és 7 méter hosszú. Ezzel a teherautóval kell olyan, méretre vágott farönköket szállítani, amelyek forgáshenger alakúak, 24 centiméter az átmérőjük, és 7 méter hosszúak. A rakomány biztonsági okokból nem nyúlhat túl a raktéren egyik irányban sem. A szállítócég az ábrán látható stratégiával rendezi el a farönköket.



a) Mutassa meg, hogy legfeljebb 86 farönköt lehet így a raktérben elhelyezni! (8 pont)

b) A raktérnek hány százaléka marad üresen, ha 86 farönköt szállítanak?

(4 pont)

Kiderült, hogy a fák egy részében megtelepedtek a szúbogarak. Bármelyik fát kiválasztva 4% annak a valószínűsége, hogy van benne szú. Az egyik vásárló cég 50 fát vett.

c) Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb egy szúrágta fa kerül a rakományába? (4 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Térgeometria 37. feladat*

b) *Lásd: Térgeometria 37. feladat*

c) (0,96 a valószínűsége, hogy egy fában nincs szú.)

P (0 darab szúrágta fa) $= 0{,}96^{50} \approx 0{,}130$ (1 pont)

P (1 darab szúrágta fa) $= \binom{50}{1} \cdot 0{,}96^{49} \cdot 0{,}04 \approx 0{,}271$ (2 pont)

A keresett valószínűség ezek összege: $0{,}130 + 0{,}271 = 0{,}401$. (1 pont)

Összesen: 16 pont

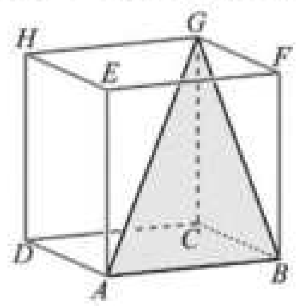
62) Egy áruházláncban minden *Kocka* csokoládé vásárlásakor a csoki mellé ajándékba adnak egy „zsákbamacska" csomagot, amelyben egy kis fémkocka van. A fémkocka mindegyik lapja sárga vagy kék színűre van festve úgy, hogy mind a két színű lap előfordul.

a) Igazolja, hogy (színezés szerint) összesen 8-féle kocka van, ha a forgatással egymásba vihető színezéseket nem tekintjük különbözőnek (6 pont)

b) Dórinak 7 különböző színezésű kockája van, így már csak egy hiányzik a teljes készlethez, hogy abból nyakláncot készítsen magának. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha 3 darab *Kocka* csokoládét vesz, akkor meglesz a teljes készlete? (Feltételezhetjük, hogy mindegyik kockafajta ugyanakkora valószínűséggel fordul elő a csomagokban.) (4 pont)

Az ábrán látható *ABCDEFGH* kocka élhosszúsága 10 egység.

c) Számítsa ki az *ABG* háromszög beírt körének sugarát! (6 pont)



Megoldás:

a) *Lásd: Bizonyítások 34. feladat*

b) Dóri egy csokoládé vásárlása esetén $\frac{1}{8}$ valószínűséggel kapja meg a hiányzó kockát $\left(\frac{7}{8}\text{ valószínűséggel nem}\right)$. Ez derüljön ki a megoldásból. (1 pont)

(A komplementer esemény valószínűségét számítjuk ki.) Annak valószínűsége, hogy egyik ajándék sem megfelelő: $\left(\frac{7}{8}\right)^3$. (1 pont)

Annak valószínűsége tehát, hogy valamelyik ajándék megfelelő: $1 - \left(\frac{7}{8}\right)^3$,

(1 pont)

ami kb. 0,330. (1 pont)

c) *Lásd: Térgeometria 38. feladat*

Összesen: 16 pont